令和８年８月１８日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和９年度修士課程入学試験

「専門科目」についての注意

試験時間　１４：３０～１６：４５

1. 以下の８題より３題を選択し、解答せよ。
   （力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
   （配点：各題５０点、合計１５０点満点）

2. 選択した問題は専門科目問題選択確認用紙に〇をつけること。

3. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

4. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（力学）

[１] 密度が一様な球（質量 M, 半径 a）が粗い水平な床の上にある。以下の問いに答えよ。

(1) この球の中心軸まわりの慣性モーメント I を計算せよ。

(2) この球に撃力を加えた。そうすると球は図 1 のように重心速度V_0 および角速度ω_0で水平な床の上を滑りながら直線的に運動を始めた。このとき$V_0 > a\omega_0$であった。球と床の間の動摩擦係数をμ、摩擦力を F、垂直抗力を R として球の水平方向、垂直方向の運動方程式を示せ。ただし重力加速度はg とする。

(3) 球の重心まわりの運動方程式を示せ。慣性モーメントは I のままでよい。

(4) 撃力を加えてから時間 t_1経過後に球は滑らずに転がるようになった。慣性モーメントを$I = MKa^2$ (K はある定数)として、t_1をV_0, ω_0, a, μ, K, gを用いて示せ。

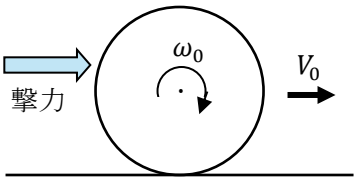


図 1

[２] 摩擦のない質量を無視できる滑車において、片側には質量 m の 2 つの質点 A, B がバネに連結された状態で吊るされており、反対側には質量 $2m$ の質点 C が吊るされている。そしてこれら質点は静止している（図 2)。バネの自然長を L、バネ定数を k とし、バネの質量は無視できるものとする。また重力加速度をgとして、以下の問いに答えよ。

(1) 質点が静止した状態（図 2）でのバネの自然長からの伸びを示せ。

(2) 質点 A をつり合いの位置から L_0 だけ伸ばして静かに離すと各質点は微小振動を始めた。時刻 t における各質点の位置を$X_A(t) + L$, $X_B(t), X_C(t)$、糸の張力を T として、それぞれの運動方程式を示せ。ただし下向きを x 軸方向とする。

(3) 質点 B と C は互いに逆方向へ運動する。この関係を用いて(2)で求めた運動方程式を解き、質点 A および B がどのような運動をするのか、その時間変化を説明せよ。

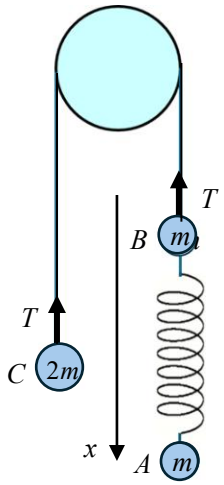


図 2

問題作成意図

剛体の力学およびバネでつながれた質点系について基本的な理解を問う意図で作成した。

解答例

［1］(1)慣性モーメントを I，密度をρとしたとき

$I = \iiint r^2 \sin^2\theta \cdot \rho r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi dr = \frac{2}{5}Ma^2$ である。

(2)

重心の運動方程式は

$M\frac{d^2x}{dt^2} = -F = -\mu Mg,\quad M\frac{d^2y}{dy^2} = 0 = R - Mg$

(3) 重心まわりの運動方程式は

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = aF = a\mu Mg$

(4) $t_1 = \frac{V_0 - a\omega_0}{\left(1+\frac{1}{K}\right)\mu g}$ 後に滑りはなくなりV，ω が一定の運動になる。

［2］

(1) 伸びを x_0 とすると $kx_0=mg$ より $x_0 = mg/k$

(2) A の座標は X_A+L よりバネの伸びは$(X_A + L) - L - X_B = X_A - X_B$

$A : m\frac{d^2X_A}{dt^2} = -k(X_A - X_B) + mg$

$B : m\frac{d^2X_B}{dt^2} = k(X_A - X_B) + mg - T$

$C : 2m\frac{d^2X_C}{dt^2} = 2mg - T$

(3) 初期条件 $x_A(0) = L_0$ および初速ゼロを考量すると

$x_A(t) = L_0\cos\omega t \qquad x_B(t) = -\frac{L_0}{3}\cos\omega t$ ただし $\omega = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$ で運動する。

問題２（物理化学）

［１］ある材料 A の分解反応について室温 (27.0 ℃) にて観測した所、10.0 分後に 25.0%が分解した。この分解反応が 1 次反応式に従うとして、以下の設問 (1)〜(3) に答えよ。なお、絶対温度は 273 K、気体定数 R は 8.31 J / (mol・K) とし、必要に応じて以下の数値を使っても良い。$ln2 = 0.693, ln3 = 1.10, ln5 = 1.61, ln10 = 2.30$

(1) 材料 A の時刻 $t = 0$ における初期濃度を a 、時刻 t における濃度を $a - x$（ x は時刻 t にて材料 A が分解した濃度)、k は速度定数とする時、微分型 1 次反応式の定義に基づいて微分方程式をたて、積分型反応速度式を導きなさい。

(2) 材料 A が 99.0% 分解するのに必要な時間（分単位）を計算せよ。

(3) この分解反応はアレニウスの式に従い、その活性化エネルギーは 104 kJ / mol、頻度因子は 6.93×10^{14} 1/s であった。この分解反応が、毎秒 50.0% で進行する温度（℃）を計算せよ。

［２］真空準位に対して、水素原子のエネルギー準位とエネルギーが表 1 にて与えられている場合、以下の設問に答えなさい。
なお、プランク定数 $h = 6.63\times10^{-34}$ J･s、光速 $c = 3.00\times10^{8}$ m / s、素電荷 $e = 1.60\times10^{-19}$ C 、1 eV = 1.60×10^{-19} J とする。

(1) エネルギー準位のうち、1 番エネルギーが低く安定なエネルギー準位をなんと呼ぶか。日本語と英語で答えなさい。また表 1 の E1〜E5 のうち、どれに該当するか答えなさい。

(2) エネルギー準位が E2 から E4 に遷移する際に放出される電磁波の波長を nm 単位で答えなさい。また、その波長は X 線、紫外線、可視光線、赤外線、マイクロ波のいずれに属するか答えなさい。

表 1 ある原子のエネルギー準位とエネルギー値

エネルギー準位	エネルギー (eV)
E1	−0.54
E2	−0.85
E3	−1.51
E4	−3.40
E5	−13.6

問題２（物理化学）解答例

［１］

(1) $kt = ln\frac{a}{a-x}$

(2) 161（分）

(3) 89.8（℃）

［２］

(1)　日本語：基底状態、英語：Ground State、記号：E5

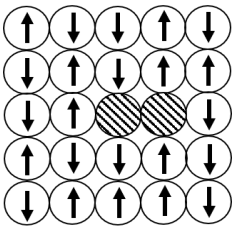
(2)　486（nm）、可視光線

問題２（物理化学）出題意図

[１] 反応速度論及びアレニウスの式についての基礎知識と、それらを 1 次反応の分解反応（速度定数・反応時間・反応温度の算出）へ適用する能力を問う。

[２] 原子のエネルギー準位と光子のエネルギー・波長の関係についての基礎知識と、エネルギー準位間の電子遷移に伴う電磁波放出へ適用する能力を問う。

問題３（熱力学／統計力学）



右図に示す通り、結晶（体系）を構成するN個の格子点（原子位置）に、N_+個の上向きスピン(↑)とN_-個の下向きスピン(↓)を配置する。N、N_+、N_-はいずれも十分に大きく（$N \gg 1$、$N_+ \gg 1$、$N_- \gg 1$）、$N = N_+ + N_-$という関係にある。スピンは↑と↓の二つの状態のみを取ると仮定する。体系に対して外部から印加される磁場は存在しない。以下の設問 (1)〜(8) に答えよ。

(1) ある格子点に上向きスピンが配置される確率$p_\uparrow$と下向きスピンが配置される確率$p_\downarrow$は、いずれも周囲のスピン状態に影響されず、体系中の全ての格子点において、それぞれ一定の値を示すものと考える。$p_\uparrow$と$p_\downarrow$を、それぞれN、N_+、N_-を用いて記せ。

(2) 体系に含まれる上向きスピンの総数と、下向きスピンの総数の差異を表す指標として、$m = (N_+ - N_-)/N$を導入する。(1)で求めた$p_\uparrow$と$p_\downarrow$を、それぞれmを用いて記せ。ただしmの範囲は$-1 < m < 1$のみを考える。

(3) 図中の斜線で例示するような一組の隣接格子点のペア（第一近接の関係にある格子点のペア）に注目する。この隣接格子点のペアが示し得るスピン配列は ↑↑、↓↓、↑↓ 、↓↑ の四通りである。(2)の結果をもとに、これら四通りのスピン配列が実現する確率を、それぞれmを用いて記せ。

(4) N個の格子点に、N_+個の上向きスピン(↑)とN_-個の下向きスピン(↓)を配置する場合について、配置のエントロピーSは①式のように表すことができる。空欄「ア」をうめよ。なお①式の導出にはスターリングの公式 $a! \cong a\ln a - a$ $(a \gg 1)$を利用している。 k_B はボルツマン定数を表す。

$$S = \frac{1}{2}Nk_\mathrm{B}\left\{\boxed{\text{ア}} - (1+m)ln(1+m) - (1-m)ln(1-m)\right\} \qquad ①$$

(5) これ以降、上記の要領で配置されたスピンの間に相互作用がはたらく状況を考える。ここでは、隣接する格子点（第一近接の関係にある格子点）に対してのみ、スピン間に相互作用がはたらくものとする。スピン配列が平行となる ↑↑ と ↓↓ の条件では、スピン間相互作用エネルギーを $-J$ とする $(J > 0)$。一方、スピン配列が反平行となる ↑↓ と ↓↑ の条件では、スピン間相互作用エネルギーを J とする。(3)の結果をもとに、ある一組の隣接格子点のペアが示すスピン間相互作用エネルギーの平均値$\langle e \rangle$は、②式のように与えられることを示せ。

$$\langle e \rangle = -J\,m^2 \qquad ②$$

(6) この体系における原子の配位数、即ち一つの格子点に隣接する（第一近接の関係にある）格子点の数をzとする。N が十分に大きい場合、体系の端部に位置する、zが小さい例外的な格子点の割合は十分に小さい。このため、体系に含まれる隣接格子点のペアの総数 N_s は③式のように近似できる。③式の右辺において、Nz に $1/2$ が乗じられる理由を説明せよ。

$$N_s = \frac{1}{2}Nz \qquad ③$$

（裏面にも問題は続きます）

(7) (6)の結果をもとに、この体系が示すスピン間の相互作用エネルギーの総和 E を N、J、z、m を用いて記せ。

(8) (7)で求めた E をこの体系における内部エネルギーとみなす。(4)と(7)の結果をもとに、ヘルムホルツの自由エネルギー F を N、J、z、m、k_{B} および温度 T を用いて記せ。

―――――― 熱力学／統計力学： 出題意図 ――――――

統計力学に基づくミクロな状態の既述と、熱力学における自由エネルギーとの関係について、理解力を問う。

―――――― 熱力学／統計力学： 解答例 ――――――

(1)

$p_{\uparrow} = \frac{N_+}{N}$　　$p_{\downarrow} = \frac{N_-}{N}$

(2)

$p_{\uparrow} = \frac{1+m}{2}$　　$p_{\downarrow} = \frac{1-m}{2}$

(3)

↑↑ となる確率は $\frac{1}{4}(1+m)^2$　　↓↓ となる確率は $\frac{1}{4}(1-m)^2$

↑↓ となる確率は $\frac{1}{4}(1-m^2)$　　↓↑となる確率は $\frac{1}{4}(1-m^2)$

(4)

いまの場合、配置数 W（スピンの配置に関わる場合の数 W）は以下の通りとなる。

$$W = \frac{N!}{N_+!\,N_-!}$$

配置のエントロピーは、

$$S = k_B lnW = \frac{1}{2}Nk_B\{2ln2 - (1+m)ln(1+m) - (1-m)ln(1-m)\}$$

従って　ア　は　$2ln2$　となる。

(5)

$$\langle e\rangle = -J \times \frac{1}{4}(1+m)^2 - J \times \frac{1}{4}(1-m)^2 + J \times \frac{1}{4}(1-m^2) + J \times \frac{1}{4}(1-m^2) = -Jm^2$$

(6)

Nz は、体系中の全ての格子点(N)について隣接格子点の数(z)を数えあげたものである。スピン対の数 N_sは、隣接する格子点の対の数に相当するので、数える際の重複を避けるため Nz に $1/2$ を乗じる必要がある。

(7)

$$E = N_s \langle e \rangle = -\frac{1}{2} NzJm^2$$

(8)

$$F = -\frac{1}{2} NzJm^2 - \frac{1}{2} Nk_B T\{2ln2 - (1+m)ln(1+m) - (1-m)ln(1-m)\}$$

問題４（電磁気学）

［１］ 電場の単位である N/C と V/m が SI 単位系において等価であることを、エネルギーの単位 J と電位の単位 V の定義を用いて示せ。

［２］真空中に電荷量 Q（4.0 nC ）の点電荷がある。この点電荷から距離 r（0.30 m）だけ離れた位置の電場の強さ E を求めよ。ただし、クーロン定数は $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9.0 \times 10^9$ N·m^2 / C^2 である。ε_0は真空の誘電率である。

［３］導体円柱（半径 a）の芯線と導体円筒（内半径 b、外半径 c）の外殻を同軸に配置する。ただし両者は無限に長く、$a < b < c$ である。また、導体以外の部分は真空とする。今、芯線に単位長さ当たり λ の電荷を与える一方、外殻は電気的に中性として、以下の問いに答えよ。

(1) 外殻の内側表面での面電荷密度 σ_{in} を求めよ。

(2) 外殻の外側表面での面電荷密度 σ_{out} を求めよ。

(3) 芯線と外殻の間 $(a < r < b)$における電場の強さ E を、ガウスの法則を用いて導け。

(4) 外殻に対する芯線の電位 V を求めよ。

(5) 軸方向単位長さあたりの静電容量 C_0 を求めよ。

(6) C_0 の単位を示せ。ただし、静電容量は SI 組立単位の記号を用い、答の表記に N や C を含めてはならない。

(7) 芯線と外殻の間に蓄えられる軸方向単位長さあたりの静電エネルギーUを、電場のエネルギー密度 u を用いて求めよ。ただし、 $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ とする。

出題意図

静電場に関する問題である。電場、電位、静電容量および導体の性質に関する知識と理解、基本的な計算能力を問う。

回答例

［１］　1 V = 1 J / C　　1 J = 1 N m　　従って　1 V/m = 1 N/C

［２］　$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = (9.0\times10^9)\frac{4.0\times10^{-9}}{0.3^2} = 4.0\times10^2$　N/C

［３］ (1)　$\sigma_{in} = -\frac{\lambda}{2\pi b}$　　(2) $\sigma_{in} = \frac{\lambda}{2\pi c}$

(3)　ガウスの法則は $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

左辺：ガウス平面として半径 r（$a < r < b$）、長さ l の円筒面 S を考えると、この円筒面を貫く電気力線は対称性より半径方向を向くので、$E\cdot 2\pi rl$ となる。

右辺の電荷：長さ l を考えると $Q=\lambda l$ 。

以上より　$E = \frac{\lambda l}{(2\pi rl)\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

(4)　$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

(5)　コンデンサの関係式 Q=CV より　$C_0 = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

(6)　F/m

(7)　a から b の空間の微小体積要素 $dV = 2\pi r\,dr$ を用いて全空間積分をする

$$U = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(2\pi r\,dr) = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2(2\pi r\,dr) = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

問題５（量子力学）

［１］一次元のポテンシャル障壁

$$V(x) = V_0\{\delta(x) + \delta(x-a)\}$$

に、質量mの粒子が一定のエネルギー$E\ (>0)$で負の無限遠方から定常的に入射する場合を考える。$V_0 > 0$とする。この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式の解は、kを正の実数として次のように表される。A, B, C, D, F, Gは未定係数である。以下の問いに答えよ。

$$u(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx} & (\text{領域}\ 1 : x < 0) \\ C\mathrm{e}^{ikx} + D\mathrm{e}^{-ikx} & (\text{領域}\ 2 : 0 \le x \le a) \\ F\mathrm{e}^{ikx} + G\mathrm{e}^{-ikx} & (\text{領域}\ 3 : a < x) \end{cases}$$

なお、時間を含まないシュレディンガー方程式を$V_0\ \delta(x-x_0)$の周りの微小な領域$x_0-\varepsilon$から$x_0+\varepsilon$まで積分し$\varepsilon\ (>0) \to 0$とすることで次式が成り立つことを使用してよい。

$$\left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0+\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0-\varepsilon} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}u(x_0)$$

(1) $x=0$と$x=a$での接続条件（境界条件）をすべて記せ。

(2) 定常状態での確率流密度$S(x)$は以下で定義される。

$$S(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[u^*(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}u^*(x)}{\mathrm{d}x}u(x)\right]$$

領域３における透過波の確率流密度S_tを計算せよ。計算過程も記すこと。

(3) 領域１から領域３への透過率TをA, B, C, D, F, Gのうち必要なものを使って表せ。

(4) 接続条件を連立して解くことにより、領域１から領域３への透過率TをA, B, C, D, F, Gを含まない形で表せ。計算過程も記すこと。

［２］水素原子内の電子について考える。基底状態での規格化された波動関数は、球座標(r, θ, ϕ)を用いて以下のように表される。ただしa_0はボーア半径である。

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}}$$

動径座標rに対する運動量演算子を

$$\hat{p}_r = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $[r, \hat{p}_r]$を計算せよ。計算過程も記すこと。

(2) 基底状態での$\hat{p}_r$の期待値$\langle\hat{p}_r\rangle$を計算せよ。計算過程も記すこと。必要なら以下の積分公式を使用してよい。

$$\int_0^\infty r^n e^{-\beta r}\mathrm{d}r = \frac{n!}{\beta^{n+1}} \qquad (\beta > 0, n \ge 0)$$

問題５（量子力学）解答例

[１](1) $A+B=C+D$ …①

$(ikC-ikD)-(ikA-ikB)=\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}(C+D)$ …②

または $(ikC-ikD)-(ikA-ikB)=\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}(A+B)$

$Ce^{ika}+De^{-ika}=Fe^{ika}$ …③

$ikFe^{ika}-(ikCe^{ika}-ikDe^{-ika})=\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}Fe^{ika}$ …④

または $ikFe^{ika}-(ikCe^{ika}-ikDe^{-ika})=\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}\left(Ce^{ika}+De^{-ika}\right)$

(2) $S_t=-\dfrac{i\hbar}{2m}\left[F^*e^{-ikx}ikFe^{ikx}-\left(-ikF^*e^{-ikx}\right)Fe^{ikx}\right]=-\dfrac{i\hbar}{2m}(ik|F|^2+ik|F|^2)=\dfrac{\hbar k}{m}|F|^2$

(3) $T=\left|\dfrac{F}{A}\right|^2$

(4) ③$-$④$/(ik)$より $\quad C=\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}+1\right)F$

③$+$④$/(ik)$より $\quad D=-\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}Fe^{2ika}$

①$-$②$/(ik)$より $\quad A=\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}+1\right)C+\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}D$

$\therefore A=\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}+1\right)^2F-\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}\right)^2e^{2ika}F$

$\therefore T=\left|\dfrac{1}{\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}+1\right)^2-\left(\dfrac{imV_0}{k\hbar^2}\right)^2e^{2ika}}\right|^2$

[２](1) fを任意の関数として

$[\hat{r},\hat{p}_r]f=(r\hat{p}_r-\hat{p}_rr)f=-i\hbar\dfrac{\partial(rf)}{\partial r}+i\hbar\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r^2f)}{\partial r}=-i\hbar(f+rf')+i\hbar\dfrac{1}{r}(2rf+r^2f')=i\hbar f$

$\therefore [\hat{r},\hat{p}_r]=i\hbar$

(2) $\langle\hat{p}_r\rangle=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{\infty}dr\,r^2u^*(r,\theta,\phi)\hat{p}_ru(r,\theta,\phi)$

$=4\left(\dfrac{1}{a_0}\right)^3\displaystyle\int_0^{\infty}dr\,r^2e^{-\frac{r}{a_0}}\left(-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)e^{-\frac{r}{a_0}}$

$=-4i\hbar\left(\dfrac{1}{a_0}\right)^3\displaystyle\int_0^{\infty}dr\,r\left(1-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}$

$=-4i\hbar\left(\dfrac{1}{a_0}\right)^3\left(\displaystyle\int_0^{\infty}dr\,r^1e^{-\frac{2r}{a_0}}-\frac{1}{a_0}\int_0^{\infty}dr\,r^2e^{-\frac{2r}{a_0}}\right)$

$=-4i\hbar\left(\dfrac{1}{a_0}\right)^3\left(\dfrac{a_0^2}{4}-\dfrac{a_0^2}{4}\right)$

$=0$

問題５（量子力学）出題意図

［１］接続条件（境界条件)、確率流密度、透過率などについての知識及び理解と、それらを１次元のデルタ関数型ポテンシャルの問題へ適用する能力を問う。

［２］交換関係や期待値などについての知識及び理解と、それらを３次元の中心ポテンシャルの問題へ適用する能力を問う。

問題６（輸送現象論）

［１］ 次の文章の（あ）～（し）に、適切な語句、式または記号を入れよ。

輸送現象に関連する無次元数について、意味するものの名称、一般に用いられる記号、またその定義式を、例にならって解答せよ。ただし、定義式には以下の記号を用いること。

C_p：定圧比熱容量、D：拡散係数、h_T：熱伝達係数、k：熱伝導率、

h_m：物質移動係数、l：代表長さ、u：代表速度、μ：粘性係数、ν：動粘性係数

（例）慣性力と粘性力の関係を代表する無次元数

・（ レイノルズ数 ）　Re ＝ $\dfrac{ul}{\mu}$

名　称　　一般的な記号　　定義式

(1) 運動量拡散と熱拡散の大きさの関係を代表する無次元数

・（(あ)＿＿＿＿＿＿＿＿ ）（い）＿＿＿＿ ＝ （う)＿＿＿＿＿＿

(2) 対流による熱伝達と熱伝導の大きさの関係を代表する無次元数

・（(え)＿＿＿＿＿＿＿＿ ）（お）＿＿＿＿ ＝ （か)＿＿＿＿＿＿

(3) 運動量拡散と物質拡散の大きさの関係を代表する無次元数

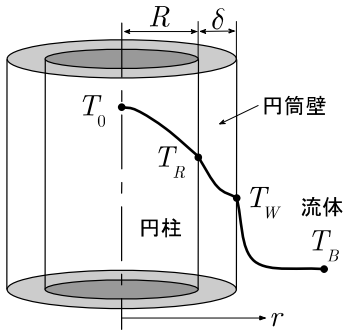
・（(き)＿＿＿＿＿＿＿＿ ）（く）＿＿＿＿ ＝ （け)＿＿＿＿＿＿

(4) 対流による物質伝達（移動）と物質拡散の大きさの関係を代表する無次元数

・（(こ)＿＿＿＿＿＿＿＿ ）（さ）＿＿＿＿ ＝ （し)＿＿＿＿＿＿

［２］ 図に示すように、半径 R の無限に長い円柱の外側に、厚さ δ の円筒壁を重ねた系を考え、定常状態における半径方向の温度分布を求める。

円柱内部では、単位体積・単位時間当たり $\dot{q}$ の熱が一様に発生しているものとする。また、円柱と円筒壁の接触面における接触熱抵抗は無視できるものとする。円柱および円筒壁の熱伝導率は一定であり、それぞれk_1、k_2とする。



(1) 円柱の中心温度 T_0 と表面温度 T_R との差 $T_0 - T_R$ を求めよ。ただし、定常状態における円柱内部の熱伝導方程式は、次式で与えられるものとする。

$$k_1 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q} = 0$$

(2) 円柱と円筒壁の接触面において熱流束が連続することを用いて、円柱の表面温度 T_R と円筒壁の外表面温度 T_W との差 $T_R - T_W$ を求めよ。

（裏面にも問題は続きます）

(3) 円筒壁の外側を流れる流体に対する熱伝達係数を h とするとき、円筒壁の外表面温度 T_W と流体のバルク温度 T_B との差 $T_W - T_B$ を求めよ。

(4) 以上の結果を用いて、円柱の中心温度 T_0 と流体のバルク温度 T_B との差 $T_0 - T_B$ を表す式を求めよ。

(5) 長さ L の円柱から流体のバルクへ伝達される熱量に対する全熱抵抗 R_T を表す式を求めよ。

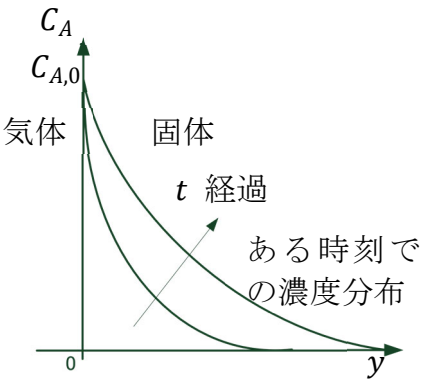
［3］ 一般に、多成分系において物質の生成および消滅がない場合、物質 A の三次元拡散方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(u\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\frac{\partial C_A}{\partial y} + w\frac{\partial C_A}{\partial z}\right) = D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}\right)$$

ここで C_A は物質 A の濃度[$\mathrm{mol/m^3}$]、u, v, w は、それぞれ x, y, z 方向の速度[$\mathrm{m/s}$]、D_{AB} は拡散係数[$\mathrm{m^2/s}$]である。

固体と気体との界面から物質 A が固体内部へ非定常拡散する場合を考える。

右図に示すように、$y < 0$ の領域を気体、$y \geq 0$ の領域を固体とし、物質 A が気体から固体内部へ時間の経過とともに拡散する場合を考える。固体は y の正方向に十分深く広がっており、気体も y の負方向に無限に広がっているものとする。気体中の物質 A の濃度は一様であり、固体中の物質 A の濃度は x 方向および z 方向には変化しないものとする。また、固体は巨視的に静止しており、固体内部にバルク流動はない。



(1) 以上の仮定の下で、前述の三次元拡散方程式を簡略化し、その式を示せ。

(2) $t = 0$ までは固体中に物質 A が存在せず、$t > 0$ では固体表面における物質 A の濃度が一定値 $C_{A,0}$ に維持されるものとする。このときの初期条件および境界条件を示せ。

(3) 結合関数 $\eta = \frac{y}{2\sqrt{D_{\mathrm{AB}}t}}$を導入することにより、(1) で簡略化された拡散方程式を常微分方程式に書き換えられる。変換の手順を示し、得られる常微分方程式および境界条件を示せ。

(4) (3) で得られた常微分方程式の一般解は、次式で表される。

$C_{\mathrm{A}} = C_1 + C_2\int_0^{\eta}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi$, ここで、$C_1$ 及び C_2 は積分定数である。

次の関係 $\int_0^{\pm\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて、固体内における物質 A の濃度分布 C_{A} を求めよ。

(5) 固体と気体との界面 ($y = 0$) から固体内部へ拡散する物質 A の拡散流束 $n_{A,y}\big|_{y=0}$ を求めよ。

問題６（輸送現象論）出題意図

［１］分子運動に起因する三つの輸送現象（粘性による運動量輸送、熱伝導による熱輸送、および拡散による物質輸送）に関する基本的な知識及び理解を問う。

［２］熱伝導による熱の輸送及び熱伝導方程式に対する理解と熱伝導方程式の応用能力を問う。

［３］拡散による物質輸送及び拡散方程式に対する理解と拡散方程式の応用（非定常条件での解析）能力を問う。

問題６（輸送現象論）解答例

［１］	（例）　（ レイノルズ数）	Re	$\frac{ul}{\mu}$
	（あ）プラントル数	（い）Pr	（う）$\frac{\nu}{a}=\frac{\nu}{\frac{k}{\rho C_p}}=\frac{\mu C_p}{k}$
	（え）ヌセルト数	（お）Nu	（か）$\frac{h_T l}{k}$
	（き）シュミット数	（く）Sc	（け）$\frac{\nu}{D}$
	（こ）シャーウッド数	（さ）Sh	（し）$\frac{h_m l}{D}$
［２］	(1)	$T_0-T_R=\frac{\dot{q}R^2}{4k_1}$	
	(2)	$T_R-T_W=\frac{R^2\dot{q}}{2k_2}ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)$	
	(3)	$T_W-T_B=\frac{R^2\dot{q}}{2h(R+\delta)}$	
	(4)	$T_0-T_B=\frac{\dot{q}R^2}{4k_1}+\frac{\dot{q}R^2}{2k_2}ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)+\frac{\dot{q}R^2}{2h(R+\delta)}=\frac{\dot{q}R^2}{2}\left[\frac{1}{2k_1}+\frac{1}{k_2}ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)+\frac{1}{h(R+\delta)}\right]$	
	(5)	$R_T=\frac{T_0-T_B}{\dot{q}\pi R^2 L}=\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{1}{2k_1}+\frac{1}{k_2}ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)+\frac{1}{h(R+\delta)}\right]$	
［３］	(1)	$\frac{\partial C_A}{\partial t}=\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$	
	(2)	$t=0$ で、$C_A=0$ $y=0$ で、$C_A=C_{A,0}$ $y=\infty$ で、$C_A=0$	
	(3)	$\frac{\mathrm{d}^2 C_A}{\mathrm{d}\eta^2}+2\eta\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}\eta}=0$ $\eta=0$ で、$C_A=C_{A,0}$ $\eta=\infty$で、$C_A=0$	
	(4)	$\frac{C_A}{C_{A,0}}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}exp(-\xi^2)\,d\xi=1-erf\left(\frac{y}{2\sqrt{D_{A,B}t}}\right)=erfc(\frac{y}{2\sqrt{D_{A,B}t}})$	
	(5)	$n_{A,y}\big\vert_{y=0}=C_{A,0}\sqrt{\frac{D_{A,B}}{\pi t}}$	

問題７　（固体物理学）

[１] 結晶構造に関する以下の問いに答えよ．

(1) 図１は NaCl 構造の単位格子である．この構造が属するブラベー格子を答えよ．そのように考える理由も述べよ．

(2) 単位格子中に含まれる原子数を Na および Cl 原子について，それぞれ答えよ．

(3) [100]方向の原子の並びを図示せよ．

(4) [110]方向から見たときの原子配置の投影図を描け．

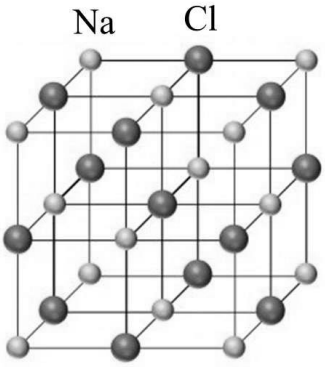


図　1

[２] 格子振動に関する以下の問いに答えよ．

図１に示すように，多くの化合物中には質量の異なる原子が等間隔で直線的に並ぶ結晶方位が存在する．このような場合の結晶の格子振動を以下のように考える．

図２は異なる質量 M および m（$M>m$）の２種類の原子がx方向に交互に等間隔で並んでいる一次元モデル結晶であり，原子はばね定数 b のばねで互いに結ばれている．格子定数を a とし，n 番目の質量 M の原子の平衡位置からの変位を$u_n(x,t)$，および質量 m の原子の変位を$v_n(x,t)$とする．原子に働く力は両隣の原子からの力のみを考慮する．

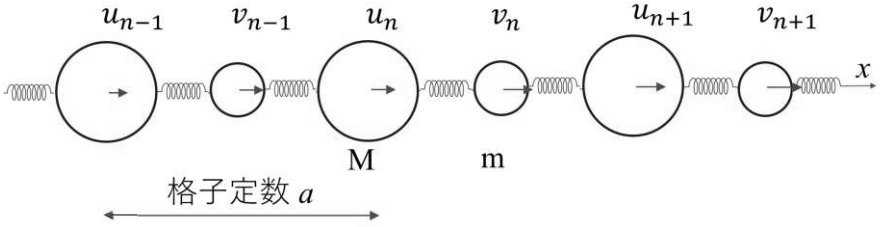


図　2

(1) n 番目の質量 M および m の原子の運動方程式をそれぞれ示せ．

(2) $u_n(x,t)$および$v_n(x,t)$の一般解を，$u_n(x,t)=Ae^{i(\omega t-qna)}$，および $v_n(x,t)=Be^{i(\omega t-qna)}$と表す．ここで A および B は定数であり，qおよびωはそれぞれ波数および角振動数である．これら一般解を(1)で求めた運動方程式に代入することにより，M, m, a, b, q, ω, A,および B が満たす２つの関係式を求めよ．

(3) qとωの分散関係を表す２つの式を求めよ．

(4) $q=0$の時の２つのω値を求めよ．この２つのω値が，それぞれ光学的振動および音響的振動のいずれに相当するものかを答え，$q=0$の時の２つの振動の様子をそれぞれ図示せよ．縦波および横波のいずれの振動で解答しても構わない．

(5) 第一ブリユアン領域境界での２つのω値を求め，この結晶中を伝搬しない角振動数領域が存在することを示せ．

出題の意図

[1] 空間格子の理解と結晶方位および面の表し方を問う。

[2] 結晶の格子振動に関する基本的理解を問う。

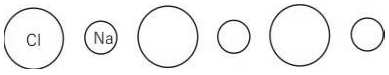
略解

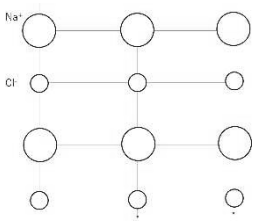
[1] (1) 面心立方格子．最近接の Na 原子と Cl 原子の対を原子群と考える．

(2) Na 原子: 4 個、Cl 原子:4 個

(3)

(4)





[2] (1) $M\frac{d^2u_n}{dt^2} = b(v_n+v_{n-1}-2u_n), \qquad m\frac{d^2v_n}{dt^2} = b(u_{n+1}+u_n-2v_n)$

(2) $-M\omega^2A = bB(1+e^{iqa})$-2bA

$-m\omega^2B = bA(1+e^{-iqa})$-2bB

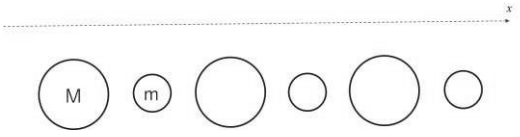
(3) $\omega_+ = \sqrt{b\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)+b\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)^2-\frac{4}{mM}sin^2\frac{qa}{2}\right\}}}$

$\omega_- = \sqrt{b\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)-b\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)^2-\frac{4}{mM}sin^2\frac{qa}{2}\right\}}}$

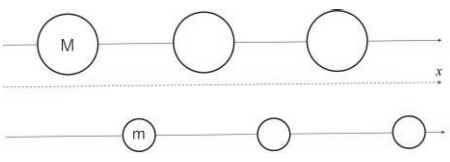
(4) $\omega_+ = \sqrt{2b\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)}$ (光学的振動), $\omega_- = 0$ (音響的振動)

この時の振動の様子を図示すると，以下のようになる．

音響的振動、(横波の場合)



光学的振動右(横波の場合)



(5) 第 1 ブリユアン領域の境界では$q = \pm\frac{\pi}{a}$である．この時、$\omega_+ = \sqrt{\frac{2b}{m}}$, $\omega_- = \sqrt{\frac{2b}{M}}$となる．$\sqrt{\frac{2b}{M}} < \omega < \sqrt{\frac{2b}{m}}$の波は結晶中を伝わらない.

問題８（原子物理学）

［１］ 光電効果とコンプトン散乱に関する以下の文章を読み、問いに答えよ。

コンプトン散乱は光子の電子との（　①　）と考えられ、入射した光子は散乱後に（　②　）。一方、光電効果も光子と電子の相互作用であるが、この反応の後、入射した光子は（　③　）。（　④　）は原子に束縛されていない自由な電子とも起こる相互作用であるのに対し、（　⑤　）は原子に束縛されている電子とのみ起こる相互作用である。これは、(a) 光子と電子のみでは、（　⑤　）の反応の前後で運動量とエネルギーを同時に保存することができないからである。

(1) （　①　）～（　⑤　）に当てはまる語句を、下記の選択肢より選び、記号を答えよ。

ア）消滅する、イ）消滅しない、ウ）弾性散乱、エ）非弾性散乱、

オ）コンプトン散乱、カ）光電効果

(2) 下線部 (a) について、運動量とエネルギーを保存するためには、運動量とエネルギーのやり取りに関して光子と電子以外に何が関与する必要があるかを答えよ。

(3) エネルギーEを有する光子の運動量をp_pとする。また、運動エネルギーEを有する電子の運動量をp_eとする。このとき、両者の比p_e/p_pを求めよ。ここで、電子の静止質量をm、光速をcとする。

［２］ 振動数νを持つ振動体の固有振動のエネルギーE_νは、温度Tにおいてはボルツマン分布

$$P(E_\nu)\mathrm{d}E_\nu = A\exp\left(-\frac{E_\nu}{kT}\right)\mathrm{d}E_\nu$$

に従う。ここで、kはボルツマン定数、Aは比例定数である。ただし、

$$\int_0^\infty A\exp\left(-\frac{E_\nu}{kT}\right)\mathrm{d}E_\nu = 1 \qquad \text{である。}$$

(1) E_νが連続的に値を取り得る場合、E_νの平均値$\langle E_\nu \rangle$を求めよ。

(2) E_νが量子化され、エネルギー素量εの整数倍、つまり$E_\nu = n\varepsilon$　（n =0, 1, 2, 3,... ）となる場合、E_νの平均値$\langle E_\nu \rangle$を求めよ。

(3) (2)のようにE_νが量子化されている場合で、温度Tが高く$\varepsilon \ll kT$という条件が満たされる時、E_νの平均値$\langle E_\nu \rangle$を求めよ。

【出題意図】

［１］　コンプトン散乱と光電効果に関する知識を問う.

［２］　黒体輻射とエネルギー量子に関する知識を問う.

【解答】

［１］

(1) ①：ウ)、②：イ)、③：ア)、④：オ)、⑤：カ)

(2) 原子

(3) $\dfrac{p_e}{p_p}=\sqrt{1+\dfrac{2mc^2}{E}}$

［２］

(1) $\langle E_\nu \rangle = kT$

(2) $\langle E_\nu \rangle = \dfrac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$

(3) $\langle E_\nu \rangle = kT$