令和８年８月 18 日

# 九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
# 令和９年度修士課程入学試験

## 「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

１．　問題１は必須問題とする。問題２と問題３は選択問題でありどちらか１題を選択すること。合計２題を解答すること。
（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（必須）

［１］ 下記に示す行列$\boldsymbol{M}$に対して下記の問に答えよ。

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

（１）行列$\boldsymbol{M}$の固有値を求め、これを対角成分とする対角行列$\boldsymbol{N}$の１例を示せ。

（２）上で示した行列$\boldsymbol{N}$を想定し、行列$\boldsymbol{M}$を対角化する行列$\boldsymbol{P}$、及びその逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$を求めよ。

（３）行列$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}^{-1}$、$\boldsymbol{N}$を用いて$\boldsymbol{M}^4$を表記せよ。

（４）（３）の表記に基づき行列$\boldsymbol{M}^4$の行列要素を求めよ。$\left|\boldsymbol{M}^4\right|$の値を示せ。

［２］ 下記の微分、積分を実行せよ。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{a}}\left(\dfrac{1}{\left|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right|}\right)$ （但し，$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\neq 0$）

（２） $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

［３］ 下記の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+xy^3$

（２） $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+9y=0$

問題２（選択）

［１］ $z$ を複素数するとき、原点と $1+i$ を結ぶ経路 C に対して、以下の積分を計算せよ。

$$\int_{\mathrm{C}} z^2 \mathrm{d}z$$

［２］ $z$ を複素数するとき、$\dfrac{1}{z^3-i}$の特異点と各特異点における留数を求めよ。ただし、留数の計算結果は$ae^{ib}$の形に整えること。$(a,b$は実数とする。$)$

［３］ 孤立特異点$a$をもつ複素関数$f(z)$が、点$a$の近傍でローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n$$

を持つとする。このとき、$a$を中心とする半径$r$の円上（反時計回り）に一周する積分径路円 C に対して

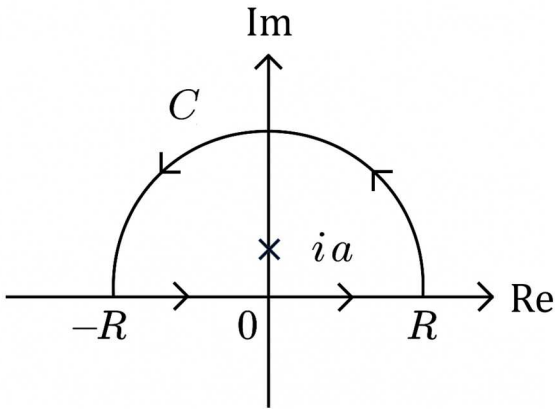
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i A_{-1}$$

が成り立つことを示せ。

［４］ 留数定理を用いて、$\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ $(a>0,k>0)$を解くことを考える。以下の問いに答えよ。

（１） 複素上半面に原点を中心とした半径$R$の半円を一周する積分径路を C として、複素積分

$\oint_{\mathrm{C}} \dfrac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$の値を求めよ。




（２） (1)の結果を利用して、定積分$\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ $(a>0,k>0)$の値を求めよ。但し、計算過程も記すこと。

問題３（選択）

［１］次の各問に答えよ。

（１）次の関数のフーリエ級数を求めよ。

$$f(x) = |\sin x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

（２） (1)の結果を用いて、 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ を求めよ。

（３） パーセバルの等式を用いて、 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ を求めよ。

［２］ラプラス変換を用いて、次の微分方程式、積分方程式を解け。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 9x(t) = \cos 2t,\ x(0) = 1,\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

（２） $x(t) - \displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\mathrm{d}\tau = e^t$

# 数学　出題意図

## 問題１（必須）

［１］
固有値、対角化、逆行列等の行列、座標変換に関する基礎的な知識と理解，計算力を問う。
［２］
微分、積分の実行力を問う。
［３］
微分方程式の理解と解を導く力を問う。

## 問題２（選択）

［１］
複素積分における正則関数の基本的な取り扱いに関する知識と理解を問う。
［２］
留数の基本的な取り扱いに関する知識と理解を問う。
［３］
留数定理に関する知識と理解を問う。
［４］
留数定理を定積分の計算に応用する能力を問う。

## 問題３（選択）

［１］
波動・振動解析に必要なフーリエ級数の基礎的な知識について、具体的な周期関数を例に問う。
［２］
三角関数や指数関数を含む微分方程式、積分方程式について、ラプラス変換、たたみ込み等を用いた解法の理解を問う。

# 数学　解答例

問題１（必須）

| | | |
|---|---|---|
| ［１］ | (1) | 固有値は $1,\ -1,\ -2$　　例えば, $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ |
| | (2) | $\mathbf{N}$ を(1)のように取った場合, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-4\\-1&0&1\\1&1&5\end{pmatrix}$　$\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-6&-9&-3\\1&2&1\end{pmatrix}$ |
| | (3) | $\mathbf{M}^4=\mathbf{P}\mathbf{N}^4\mathbf{P}^{-1}$ |
| | (4) | $\mathbf{M}^4=\begin{pmatrix}-19&-40&-20\\5&11&5\\25&50&26\end{pmatrix}$　$\left\|\mathbf{M}^4\right\|=16$ |
| ［２］ | (1) | $-\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}{\left\|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right\|^3}$ |
| | (2) | $\dfrac{\pi}{3}$ |
| ［３］ | (1) | $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-x^4+C_1}}$ |
| | (2) | $y=(C_1x+C_2)\exp(-3x)$ |

問題２（選択）

| | |
|---|---|
| ［１］ | $\dfrac{-2+2i}{3}$ |
| ［２］ | $\mathrm{Res}(-i)=-\dfrac{1}{3}e^{i0},\quad \mathrm{Res}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{1}{3}e^{i\frac{5\pi}{3}},\quad \mathrm{Res}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ |
| ［３］ | $I=\oint_C f(z)\mathrm{dz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\oint_C(z-a)^n\,\mathrm{dz}$<br>$z=a+re^{i\theta}$とすると、$\theta$が0から$2\pi$まで変化するとき、積分径路Cに相当する。<br>$\dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d\theta}}=ire^{i\theta}$<br>を用いると、 |

| | | |
|---|---|---|
| | | $$I=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n r^{n+1} i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$<br>$n+1\neq 0$のとき、<br>$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{i(n+1)}\left[e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{i(n+1)}\left[e^{i(n+1)2\pi}-1\right]=0$$<br>$n+1=0$のとき、<br>$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$$<br>従って、<br>$$I=2\pi i A_{-1}$$ |
| ［４］ | (1) | $$\frac{\pi}{a}e^{-ka}$$ |
| | (2) | 積分径路 C を以下のように分ける<br>$$\oint_{\mathrm{C}}\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{C}'}\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$<br>ここで、積分径路 C’は積分径路 C 上の半円部分を表す。経路 C’の積分は$z=Re^{i\theta}$とすると<br>$$\frac{dz}{d\theta}=iRe^{i\theta}$$<br>より、<br>$$\int_{\mathrm{C}'}\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\frac{e^{ikR\cos\theta}e^{-kR\sin\theta}}{(Re^{i\theta})^2+a^2}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$<br>$0<\theta<\pi$の範囲で$\sin\theta$は常に正の値を取ることから、$e^{-kR\sin\theta}$は$R\to\infty$において 0 になる。従って、経路 C’の積分の値は 0 になる。<br>以上より、(1)の結果と合わせて、<br>$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}e^{-ka}$$<br>が得られる。 |

問題３（選択）

| | | |
|---|---|---|
| | （１） | $$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=2,4,6\cdots}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(n^2-1)}\right]\cos nx$$<br>$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(4m^2-1)}\right]\cos mx\quad(n=2m)$$ |

| | | |
|---|---|---|
| [ 1 ] | | $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right]\cos nx$<br><br>上記のいずれも正解 |
| | ( 2 ) | $\frac{1}{2}$ |
| | ( 3 ) | $\frac{\pi^2-8}{16}$　または　$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$ |
| [ 2 ] | ( 1 ) | $x(t)=\frac{4}{5}\cos 3t+\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$ |
| | ( 2 ) | $x(t)=-t-1+2e^t$ |