令和７年８月１９日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和８年度修士課程入学試験

「専門科目」についての注意

試験時間　１４：３０〜１６：４５

1. 以下の８題より３題を選択し、解答せよ。
　（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
　（配点：各題５０点、合計１５０点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１ （力学）

［１］ 地表近くから水平方向に初速度 V_0 で打ち出された質量 m の人工衛星の運動を考える(図 1 模式図)。このとき地球の中心から打ち出し地点までの距離を R、その地点における重力加速度をgとする。太陽や地球以外の惑星から受ける引力および空気抵抗は無視できるものとして以下の問いに答えよ。

(1) 地球の中心を原点としたとき、この人工衛星の角運動量の大きさ L を求めよ。

(2) この人工衛星の力学的エネルギーE を m、V_0、R、gを使って表せ。

(3) この人工衛星が(i) 円運動を行う (ii) 楕円運動を行う (iii) 無限遠へ飛び去る、場合を考える。それぞれが実現するために必要な人工衛星の初速度 V_0 の条件を求めよ。

(4) 問(3)の(ii)において楕円軌道を描く場合、人工衛星と地球中心までの最接近距離は R であった。地球の中心から最も遠い地点までの距離 r を求めよ

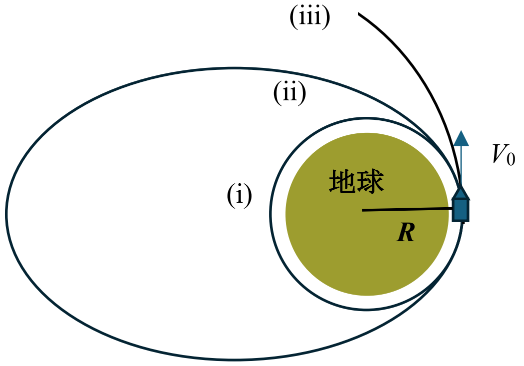


図 1

［２］質量 M, 長さ $2L$ の一様な細い棒がある。この棒の中心 O から距離 ℓ ($\ell \neq 0$)の点 P を固定軸にして鉛直面内を運動させる場合を考える(図 2)。重力加速度はgとして以下の問いに答えよ。

(1) この棒の重心を通って棒と垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(2) 点 P を通って棒と垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(3) 点 P を固定軸にして鉛直面内を運動する棒の運動方程式を求めよ。ただし棒が鉛直となす角をθとする。

(4) 運動が微小振動であるとしてその周期 T を求めよ。またこの振り子の周期が最小になるとき、ℓはどのような関係を満たすか。

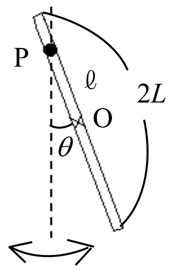


図 2

問題作成意図

万有引力を受けて運動する質点および剛体の力学について基本的な理解を問う意図で作成した。

解答例

［１］

(1) $L = mRV_0$

(2) $E = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R}$ に $mg = \frac{GMm}{R^2}$ に代入する

$$E = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgR$$

(3) (i) $mg = m\frac{V_0^2}{R}$ より$V_0 = \sqrt{gR}$

(ii) 人工衛星が束縛軌道を描くためには$E < 0$ より$V_0 < \sqrt{2gR}$

(i)の結果と併せて $\sqrt{gR} < V_0 < \sqrt{2gR}$

(iii) 無限遠へ飛び去る場合は$E \geq 0$ より$V_0 \geq \sqrt{2gR}$

(4) 遠い地点 r における速度をvとすると動径方向の速度はゼロなので$v = RV_0/r$ である。

エネルギーは$E = \frac{1}{2}mV_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{mR^2V_0^2}{2r^2} - \frac{mgR^2}{r}$

一方の解が $r = R$ (最接近点)であることを考慮すると

$$r = \frac{R}{\frac{2gR}{V_0^2} - 1}$$ である。

［２］

(1) $I = \int_{-L}^{L} x^2 dm = \frac{L^2}{3}M$

(2) 点 P まわりの慣性モーメントは$I_P = I_G + Ml^2$より

$$I_P = \frac{ML^2}{3} + Ml^2$$

(3) 運動方程式

$$I_P\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta \text{ より } \left(\frac{ML^2}{3} + Ml^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta$$

(4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 3l^2}{3gl}}$ より $l = \sqrt{\frac{L^2}{3}}$

問題２（物理化学）

［１］水の沸点と気圧の関係について、下記のクラペイロンの式をもとに評価する。以下の問いに答えよ。なお, 計算は有効数字を 3 桁とし、計算手順も分かり易く整理して示すこと。

（クラペイロンの式） $\dfrac{dp}{dT} = \dfrac{\Delta\bar{S}}{\Delta\bar{V}}$

(1) 上記のクラペイロンの式の右辺について、エントロピー変化 $\Delta\bar{S}$ に替えてエンタルピー変化 $\Delta\bar{H}$ と温度 T を用いて表した式とせよ。

(2) (1)で求めたクラペイロンの式をもとに、水の温度を T_i から T_f に変化させた時の蒸気圧変化 Δp を T_i と T_f を含む関数として表せ。

(3) 気圧 1.00 atm における水の沸点は 100 ℃（373 K）である。沸点が 97℃（370 K）となるときの気圧を計算せよ。ただし、計算には以下の値と換算式を用いよ。

水の質量数：18.0 [g/mol],　　水の蒸発エンタルピー：$\Delta\bar{H}$ = 41.0 [kJ/mol],
100℃における液体の水の密度： 960 [g/L],　　100℃における水蒸気の密度：0.600 [g/L],
対数の計算値：$\ln\dfrac{370}{373} = -0.00810$,
エネルギーの単位換算式：100 [J] = 1.00 [L·atm]

［２］以下に示す塩化銀（AgCl）の反応に関する問いに答えよ。なお, 計算は有効数字を 3 桁とし、計算手順も分かり易く整理して示すこと。

$Ag\ (s) + 1/2\ Cl_2\ (g) \rightleftarrows AgCl\ (s)$ …………①
$AgCl\ (s) \rightleftarrows Ag^+\ (aq) + Cl^-\ (aq)$ …………②　　(g)は気相、(s)は固相、(aq)は溶存状態を示す。

At 298K	Ag(s)	Ag^+(aq)	Cl_2(g)	Cl^-(aq)	AgCl(s)
標準生成エンタルピー　$\Delta_f H^{\circ}$ [kJ/mol]	0	106	0	-167	-127
標準生成ギブズエネルギー $\Delta_f G^{\circ}$ [kJ/mol]	0	77	0	-131	-110
標準エントロピー　S_m° [J/(K・mol)]	43	73	222	57	96

(1) 上表に示す熱力学データを用いて、反応①と反応②の 298 K における標準反応エンタルピー $\Delta_r H^{\circ}$、標準反応ギブズエネルギー $\Delta_r G^{\circ}$、標準反応エントロピー $\Delta_r S^{\circ}$ の値を求めよ。

(2) 反応②の 298 K における平衡定数の自然対数 ln $\boldsymbol{K}$ の値を求めよ。ここで、気体定数は R = 8.30 [J/(K・mol)]とせよ。

(3) 反応②に示す AgCl (s)の水への溶解度は極めて低い。温度が 298 K より高くなったときの AgCl(s)の水への溶解度の増減について、反応②の標準反応エンタルピー $\Delta_r H^{\circ}$ の符号から説明せよ。

(4) 反応②の 323 K における平衡定数の自然対数 ln $\boldsymbol{K}$ の値を、以下に示すファントホッフの式を使って求めよ。

（ファントホッフの式） $\ln\dfrac{K_2}{K_1} = -\dfrac{\Delta_r H^{\circ}}{R}\left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)$

なお、計算では $\Delta_r H^{\circ}$ を 298 K～323 K の温度範囲で一定と仮定し、また、以下の数値を用いよ。

$\left(\dfrac{1}{323} - \dfrac{1}{298}\right) = -2.60 \times 10^{-4}$

問題２（物理化学）出題意図

［１］熱力学第一、第二、第三法則を基に、物質の状態と特性を評価し説明する能力を問う問題。

［２］熱力学第一、第二、第三法則を基に、具体的な化学反応についてその化学平衡を評価し説明する能力を問う問題。

問題２（物理化学）解答例

［１］

(1) $\dfrac{dp}{dT} = \dfrac{\Delta\bar{H}}{T\Delta\bar{V}}$

(2) $\Delta p = \dfrac{\Delta\bar{H}}{\Delta\bar{V}} \ln\dfrac{T_f}{T_i}$

(3) 0.890 [atm]

［２］

(1) ① $\Delta_r H^\ominus$ -127 kJ mol^{-1}

$\Delta_r G^\ominus$ = -110 kJ mol^{-1}

$\Delta_r S^\ominus$ = -58.0 J K^{-1} mol^{-1}

② $\Delta_r H^\ominus$ = 66.0 kJ mol^{-1}

$\Delta_r G^\ominus$ = 56.0 kJ mol^{-1}

$\Delta_r S^\ominus$ = 34.0 J K^{-1} mol^{-1}

(2) ln K = -22.6

(3) 反応②の標準反応エンタルピー$\Delta_r H^\ominus$は正であり、これは反応②の正反応が吸熱反応であることを示す。作用反作用の法則から、吸熱反応は温度上昇と共に進みやすくなる。よって、AgCl (s)の水への溶解度は温度の増加とともに高くなる。

(4) ln K_{323K} = -20.5 (> -22.6 at 298K)

問題３（熱力学／統計力学）

N個の粒子（$N \gg 1$）から成る小正準集団の体系を考える。各粒子は、ε_0 か $-\varepsilon_0$ の二つエネルギー状態のいずれかを取るものとする。いま温度Tにおいて、エネルギー状態ε_0の粒子がN_+個、エネルギー状態$-\varepsilon_0$の粒子がN_-個存在するものとする（$N = N_+ + N_-$）。この体系について、以下の設問(1)～(8)に答えよ。

(1) 体系全体のエネルギー E を ε_0 、N_+、N_- を用いて書き表せ。

(2) N個の粒子を、エネルギー状態ε_0を取るN_+個と、エネルギー状態$-\varepsilon_0$を取るN_-個に分ける場合の配置数W （場合の数W）を N、N_+、N_- を用いて表せ。

(3) いま、N_+とN_-の差分を表す$M(= N_+ - N_-)$ という指標を導入する。(2)で求めた配置数Wに対するエントロピーSを、M と Nを用いて表すと①式のようになる。空欄「ア」をうめよ。なお①式の導出にはスターリングの公式 $a! \cong a \ln a - a$ $(a \gg 1)$を利用している。 k_{B} はボルツマン定数を表す。

$$S = k_{\mathrm{B}}\left\{N\ln N - \frac{1}{2}(N+M)\ln\frac{N+M}{2} - \boxed{ア}\right\} \qquad ①$$

(4) (3)で求めたエントロピーSの 最大値と最小値を、それぞれk_{B} と Nを用いて表せ。必要に応じて$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ という関係を参照すること。

(5) 体系全体のエネルギー E、温度T、エントロピーS に対する$\partial S/\partial E = 1/T$という関係（統計力学的な温度の定義）に注目すると②式を得る。空欄「イ」を、 N と Mを用いてうめよ。

$$\frac{1}{T} = \frac{k_{\mathrm{B}}}{2\varepsilon_0}\ln\boxed{イ} \qquad ②$$

(6) この体系に関わる分配関数fをε_0、 k_{B} 、T を用いて書き表せ。

(7) この体系において、ある一つの粒子が温度Tで「エネルギー状態 $-\varepsilon_0$ 」を取る確率p_{N-}を ε_0、 k_{B} 、T を用いて書き表せ。

(8) p_{N-}をN_-とNで書き表せ。さらに、(5)で求めた②式からも、(7)の解答と同じ結果が導かれることを示せ。

―――――― 出題意図 ――――――

小正準集団における体系のエネルギーやエントロピーに関する基礎的な問題を通して、統計力学に対する理解力を問う。

―――――― 解答例 ――――――

(1) $N_+\,\varepsilon_0 - N_-\,\varepsilon_0$

(2) $\frac{N!}{N_+!N_-!}$

(3) $\frac{1}{2}(N-M)\ln\frac{N-M}{2}$

(4) エントロピーの最大値は $S = k_{\mathrm{B}}N\ln 2$

エントロピーの最小値は $S = 0$

(5) $\frac{N-M}{N+M}$

(6) $exp\left(\frac{-\varepsilon_0}{k_BT}\right) + exp\left(\frac{\varepsilon_0}{k_BT}\right)$

(7) $\frac{exp\left(\frac{\varepsilon_0}{k_BT}\right)}{exp\left(\frac{-\varepsilon_0}{k_BT}\right)+exp\left(\frac{\varepsilon_0}{k_BT}\right)}$

(8) $p_{N-} = \frac{N_-}{N}$

(5)で求めた②式からは以下の関係を得る。

$$\frac{N-M}{N+M} = \frac{N_-}{N_+} = exp\left(\frac{2\varepsilon_0}{k_BT}\right)$$

従って以下の通り、(7)の解答と同じ結果が導かれる。

$$p_{N-} = \frac{N_-}{N} = \frac{N_+}{N}\,exp\left(\frac{2\varepsilon_0}{k_BT}\right) = \frac{exp\left(\frac{\varepsilon_0}{k_BT}\right)}{exp\left(\frac{-\varepsilon_0}{k_BT}\right) + exp\left(\frac{\varepsilon_0}{k_BT}\right)}$$

問題４（電磁気学）

図１のように同心の導体球（半径 a）と導体球殻（内径 b、外径 c）が真空中にある。ただし $a<b<c$ である。球および球殻の中心は座標原点にあり、位置ベクトルを $\vec{r}$、真空の誘電率を ε_0 とする。また無限遠を電位の基準とする。

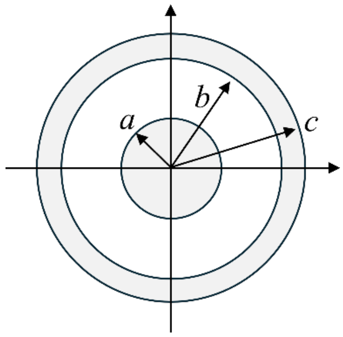


図１

（１） 導体球殻に電荷 Q を与えて導体球を接地すると、導体球に電荷 q が生じた。以下の問いに答えよ。

① $r > c$ の位置での電場の強さ $E(r)$を求めよ。

② $b > r > a$ の位置での電場の強さ $E(r)$を求めよ。

③ 導体球殻の電位ϕを求めよ。

④ q と Q の比を求めよ。

⑤ $r > c$ の位置での電場 $\vec{E}$ の回転を計算して $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ となることを示せ。

⑥ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ の物理的な意味を、ストークスの定理を用いて簡潔に説明せよ。

⑦ ϕ にナブラ演算子を作用させると$\vec{E}$が得られる。この関係より$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ となること示せ。

（２） 導体球に電荷 Q を、導体球殻に電荷 $-Q$ を与える。導体間の静電容量を求めよ。

解答

(1)

① ガウスの法則$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=Q/\varepsilon_0$ を使う

$$\vec{E}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3},\qquad E=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

②

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

③ 導体球殻の電位ϕ_1

$$\phi_1=-\int_\infty^c \vec{E}\cdot d\vec{s}=-\int_\infty^c \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

④ 導体球の電位ϕ_2

$$\phi_2=-\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{s}=\phi_1-\int_b^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 c}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

修正:右辺第２項 Q を q に修正

q と Q の関係は $\phi_2=0$ より

$$\frac{Q}{c}=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)q$$

⑤ $r>c$ の位置での電場 $\vec{E}$ が $\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0}$ を満たすこと

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_x=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\}$$

$$=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}=0$$

他の成分も同様

⑥ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0}$ の物理的な意味を、ストークスの定理を用いて簡潔に説明せよ

ストークスの定理より $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ となる。静電場は線積分が経路に依らないのでエネルギー保存が成り立つ。

⑦ $\vec{E}$ のスカラーポテンシャルは $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$

$(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi)_x = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$ 他の成分も同様にゼロ。よって、$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ となる。

（２） 導体球に電荷 Q を、導体球殻に電荷 $-Q$ を与える。導体間の静電容量を求めよ。

$b > r > a$ の電場は

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

二つの導体間の電位差は

$$\phi_{ab} = -\int_b^b E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

導体間の静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

問題 4　電磁気学

出題意図

静電場とベクトル計算に関する問題である。電場、電位、静電容量および導体の性質に関する知識と理解、基本的な計算能力を問う。

回答例

(1)

① $E = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

② $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

③ $\phi = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 c}$

④ $\frac{Q}{q} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) c$

⑤ $\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_x = 0$　他の成分も同様

⑥

ストークスの定理より $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ となる。静電場は線積分が経路に依らないのでエネルギー保存が成り立つ。

⑦ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi)_x = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ 他の成分も同様にゼロ。

(２)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

問題５（量子力学）

［1］１次元の調和振動子ポテンシャル中の質量mの粒子のハミルトニアン$\hat{H}$は以下で与えられる。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

ただし演算子$\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$は、運動量演算子$\hat{p}$を用いて次式で定義される。

$$\hat{a} \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 交換関係について考える。

(a) $[\hat{p}, x]$　を計算せよ。計算過程も記すこと。

(b) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$　を示せ。

(2) 演算子$\hat{a}^\dagger\hat{a}$の固有関数を$u_n(x)$、固有値をε_n、すなわち

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}u_n(x) = \varepsilon_n u_n(x)$$

とする。$\hat{a}u_n(x)$に$\hat{a}^\dagger\hat{a}$を作用させることにより、$\hat{a}u_n(x)$も$\hat{a}^\dagger\hat{a}$の固有関数であることを示せ。またその固有値をε_nを使って表せ。

(3) 演算子$\hat{a}^\dagger\hat{a}$の固有値ε_nには最小値が存在する。その最小値をε_0、それに属する固有関数を$u_0(x)$とする。$u_0(x)$が満たすべき微分方程式を(2)の結果を利用して導け。

(4) (3)の結果を利用してε_0を求めよ。計算過程も記すこと。

(5) 規格化された$u_0(x)$

$$u_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}$$

に対して、運動量の期待値$\langle p\rangle$を計算せよ。計算過程も記すこと。

［2］物理量を表す演算子はエルミート演算子である。すなわち物理量Aの演算子を$\hat{A}$とすると、任意の関数$f(x)$と$g(x)$に対して以下が成り立つ。

$$\langle f|\hat{A}|g\rangle = \left[\langle g|\hat{A}|f\rangle\right]^* \quad \text{すなわち} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x)\hat{A}g(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g^*(x)\hat{A}f(x)\right)^*$$

エルミート演算子の固有値は実数である。異なる固有値に属する固有関数同士は直交することを示せ。ただし固有値に縮退はないものとする。

問題５（量子力学）　解答例

［１］

(1)(a)$[\hat{p},x]f=-i\hbar\left(\frac{dx}{dx}f+x\frac{df}{dx}\right)+i\hbar x\frac{\partial f}{\partial x}=-i\hbar f,\qquad \therefore\ [\hat{p},x]=-i\hbar$

(b)$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=\frac{\alpha^2}{2}\left([x,x]-\ \frac{i}{m\omega}[x,\hat{p}]+\frac{i}{m\omega}[\hat{p},x]-\left(\frac{i}{m\omega}\right)^2[\hat{p},\hat{p}]\right)=\alpha^2\frac{i}{m\omega}[\hat{p},x]=\frac{m\omega}{\hbar}\frac{i}{m\omega}(-i\hbar)=1$

(2) $\hat{a}^\dagger\hat{a}\ [\hat{a}u_n(x)]=\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-1\right)[\hat{a}u_n(x)]=\hat{a}\varepsilon_n u_n(x)-\hat{a}u_n(x)=(\varepsilon_n-1)[\hat{a}u_n(x)]$

(3) $\hat{a}^\dagger\hat{a}[\hat{a}u_0(x)]=(\varepsilon_0-1)\hat{a}u_0(x)$

$\hat{a}u_0(x)\neq 0$の場合、ε_0が$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の最小の固有値であることに矛盾する。

$\therefore\ \hat{a}u_0(x)=0$　　すなわち　$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{\alpha^2}\frac{d}{dx}\right)u_0(x)=0$

(4) $\varepsilon_0 u_0(x)=\hat{a}^\dagger\hat{a}u_0(x)=\hat{a}^\dagger 0=0$

$u_0(x)\neq 0$なので$\varepsilon_0=0$

(5)$\langle p\rangle=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}=-i\hbar\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}(-\alpha^2)\int_{-\infty}^{\infty}dx\,xe^{-\alpha^2x^2}$

$=i\hbar\frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha^2x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$

［２］$\hat{A}f(x)=a_1f(x),\hat{A}g(x)=a_2g(x)$として

$\langle f|\hat{A}|g\rangle=\langle f|a_2g\rangle=a_2\langle f|g\rangle$

$\left[\langle g|\hat{A}|f\rangle\right]^*=[\langle g|a_1f\rangle]^*=a_1{}^*[\langle g|f\rangle]^*=a_1\langle f|g\rangle$

$\therefore\ a_2\langle f|g\rangle=a_1\langle f|g\rangle$

$\therefore\langle f|g\rangle=0,\qquad \because\ a_2\neq a_1$

問題５（量子力学）　出題意図

［1］交換関係、期待値、生成・消滅演算子など量子力学の基礎的な概念についての知識及び理解と、それらを１次元の調和振動子型ポテンシャルの問題へ適用する能力を問う。

［2］エルミート演算子についての知識及び理解を問う。

問題６（輸送現象論）

［１］次の文章の（１）～（６）に適切な語句、式あるいは単位を入れよ。

分子運動に起因する三つの輸送現象、すなわち粘性による運動量輸送、熱伝導による熱輸送、および拡散による物質輸送について考える。

直交座標系において、流体の x 方向の速度が y 方向に分布を持つ場合、x 方向の運動量は y 方向に輸送され、その運動量流束は次式で表される。

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d}{dy}(\rho v_x)$$

同様に、温度や濃度が y 方向に分布する場合、y 方向における熱伝導による熱輸送および拡散による物質輸送は、それぞれ次式で表される。

$$q_y = -a\frac{d}{dy}\left(\rho C_p T\right)、\quad j_{Ay} = -D_{AB}\frac{d}{dy}(\rho_A)$$

ここで、ρ は密度、v_x は x 方向の速度、C_p は定圧比熱、T は温度、ρ_A は成分 A と B からなる混合流体における成分 A の密度である。

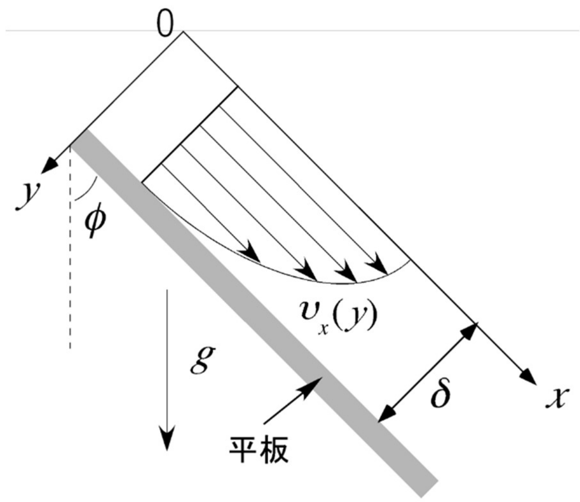
このとき、比例定数 ν、a、D_{AB} は、それぞれ（１）＿＿＿＿＿＿＿＿、（２）＿＿＿＿＿＿＿＿、（３）＿＿＿＿＿＿＿＿ と呼ばれる輸送物性で、何れもその単位はSI単位では（４）＿＿＿＿＿＿＿＿ である。これらの輸送物性を用いることで、伝熱および物質移動において重要な無次元数であるプラントル数 Pr およびシュミット数 Sc は以下のように定義される。

$Pr =$（５）＿＿＿＿＿＿＿＿、$Sc =$（６）＿＿＿＿＿＿＿＿

［２］図に示すように、垂直線から角度 ϕ（$0 \le \phi < \pi/2$）だけ傾斜した平板に沿って液膜が重力で流下する十分に発達した流れを考える。流れは定常で層流、流体は非圧縮性、空気からの摩擦力は無視できるとする。粘性による平板からの摩擦力と重力が釣り合って平板に沿って下向きに一定速度の流れとなり、液膜の厚さも一定値δに達する。このとき、平板に沿う下向き x 方向の運動方程式は

$$-\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g cos\phi = 0$$

で表される。ここで、τ_{yx} は平板に垂直な y 方向に輸送される x 方向の運動量流束、ρ は流体の密度、g は重力加速度である。流体の粘度が一定値 μ で与えられるとき、以下の問いに答えよ。



（１）平板が単位面積当たりに流体から受ける摩擦力を求めよ。

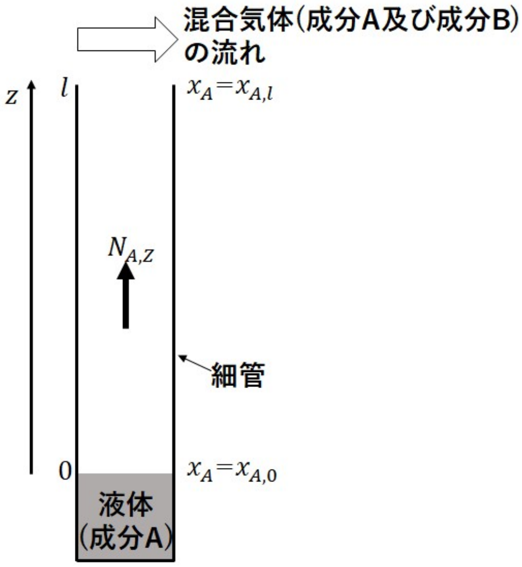
（２）y 方向に変化する x 方向の速度成分 v_x の

分布を与える式を求めよ。

（３）平板の奥行き方向の単位幅、単位時間当たりに流れる流体の体積を Q とするとき、液膜厚さ δ は Q の 1/3 乗に比例することを示せ。

［３］図に示すように細管内の成分 A の液体が表面 $(z=0)$ から蒸発し、管外を流れる成分 A 及び B の混合気体中に拡散する場合を考える。定常状態では、液体表面から成分 A は蒸発し続けるが、管内での成分 B のモル流束はゼロとする。このとき、成分 A の z 方向のモル流束 $N_{A,Z}$ は次式で与えられる。

$$N_{A,Z} = -cD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A N_{A,Z}$$



ここで、c は全モル濃度、D_{AB} は拡散係数、x_A は成分 A のモル分率である。また、液体表面及び細管出口$(z=l)$での成分 A のモル分率をそれぞれ $x_{A,0}$ 及び $x_{A,l}$ とし、化学反応は起こらない（ z 方向において $N_{A,Z}$ が変化しない）ものとする。さらに、成分 A の蒸発速度は十分に小さく、液体表面の高さは一定と仮定する。このとき、以下の問いに答えよ。

（１）細管内の成分 A の z 方向の濃度分布を与える式を求めよ。

（２）（１）の結果を用いて、液体表面における単位面積当たりの成分 A の蒸発速度を与える式を求めよ。

問題６（輸送現象論）出題意図

［１］分子運動に起因する三つの輸送現象（粘性による運動量輸送、熱伝導による熱輸送、および拡散による物質輸送）に関する基本的な知識及び理解を問う。

［２］粘性による運動量輸送及び運動方程式に対する理解と運動方程式の応用（流れの解析）能力を問う。

［３］拡散による物質輸送及び拡散方程式に対する理解と拡散方程式の応用（流れがあるときの解析）能力を問う。

問題６（輸送現象論）解答例

［１］	(1)	動粘度（運動粘度、動粘性係数）
	(2)	温度伝導度（熱拡散係数、温度拡散率など）
	(3)	拡散係数
	(4)	m^2/s
	(5)	$\dfrac{\nu}{a}$
	(6)	$\dfrac{\nu}{D_{AB}}$
［２］	(1)	$\rho g\delta cos\phi$
	(2)	$\dfrac{\rho g\delta^2 cos\phi}{2\mu}\left(1-\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2\right)$
	(3)	$\delta=\sqrt[3]{\dfrac{3\mu Q}{\rho g cos\phi}}$
［３］	(1)	$\dfrac{1-x_A}{1-x_{A,0}}=\left(\dfrac{1-x_{A,l}}{1-x_{A,0}}\right)^{\frac{z}{l}}$
	(2)	$\dfrac{cD_{AB}}{l}\ln\dfrac{1-x_{A,l}}{1-x_{A,0}}$

問題 7（固体物理学）

金属結晶中の自由電子に関する以下の問いに答えよ．

一辺がLの立方体の一価金属結晶中の自由電子の運動を考える．電子の質量をm，電荷を$-q$ $(q > 0)$とし，結晶中の原子数をNとする．自由電子は次式で表される波動関数

$$\phi(x, y, z) = A \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}$$

に従って，周期境界条件を満足しながら運動している．ここで，A は定数，k_x, k_yおよびk_zは，それぞれ波数ベクトル$\boldsymbol{k}$のx, yおよびz成分である．$\boldsymbol{k}$は，$n_i = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots, (i = x, y, z)$を用いて，$\boldsymbol{k} =$ (①)で表される．電子のエネルギーεは，$\boldsymbol{k}$の大きさ$|\boldsymbol{k}|$を用いて$\varepsilon =$ (②)で表される．

温度$T = 0$ (K)の時，$\boldsymbol{k}$空間における電子の状態は原点を中心として$|\boldsymbol{k}|$が最小の状態から，順次，N個の電子により占有されていく．この時，電子のエネルギーは最低の基底状態となる．(i)$\boldsymbol{k}$の状態は原点を中心とする球の内部に離散的にかつ一様に分布しており，この球をフェルミ球と言う．フェルミ球内で 1 つの電子状態が占有する体積は(③)である．フェルミ球の半径をk_Fとすると，k_FとNの間には，$N =$ (④)の関係がある．あるエネルギー準位の電子状態の占有確率は，(ii)フェルミ・ディラック分布関数$f(\varepsilon)$で与えられる．

電子の速度$\boldsymbol{v}$は，$\boldsymbol{k}$を用いると，$\boldsymbol{v}$ =(⑤)となる．温度$T = 0$ (K)における$\boldsymbol{v}$の分布を速度空間（$\boldsymbol{v} = (v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$）で表すと，$\boldsymbol{v}$は原点を中心とする半径$v_{\mathrm{F}}$の球の内部に離散的にかつ一様に分布している．ここで，v_{F}はフェルミ速度と呼ばれる．フェルミエネルギー(ε_F)は，v_{F}を用いて，$\varepsilon_F =$ (⑥)と表される．金属に外部から電界を印加していない状態では，$\boldsymbol{v}$の平均値は，$< \boldsymbol{v} >=$ (⑦)となる．

次に，時刻 $t = 0$の時に金属結晶のx軸の正の方向に電界 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$を与える．この時，自由電子は$\boldsymbol{E}$による力を受けるが，同時に抵抗力が働く．この抵抗力は金属中における電子の散乱に起因するものであり，(⑧)，(⑨)および(⑩)が原因として考えられる．ここでは，抵抗力は電子の速度に比例するものとして取り扱うこととする．(iii)この条件下で自由電子の運動方程式を解くと，十分に時間が経った時，すなわち(iv)定常状態でのx軸方向の電子の速度（v_{D}）を求めることができる．v_{D}は(⑪)と呼ばれるものである．(v)金属中の自由電子はオームの法則を満足している．

(1) 文章中の(①)〜(⑪)に入る適切な語句または数式を答えよ．(①), (②), (③), (④)および(⑤)については，導出過程を示せ．

(2) 下線部(i)について，エネルギー最小の状態，2 番目および 3 番目にエネルギーの低い状態に対して，$k_x \geqq 0$, $k_y \geqq 0$ および $k_z \geqq 0$の領域に存在する全ての電子の状態を$\boldsymbol{k}$空間に図示せよ．

(3) 下線部(ii)について，$f(\varepsilon)$を表す式を示せ．次に，$f(\varepsilon)$とεの関係を$T = 0$ およびT_1(K)（ただし，$T_1 > 0$(K)）の場合について，図示せよ．また，$T = 0$ およびT_1(K)の場合の違いは何に起因しているかを説明せよ．

(4) 下線部(iii)について，自由電子のx方向の運動方程式を示せ．これを解いて，$v_x(t)$を t の関数として表せ．ただし，時刻 t=0 の時，$v_x(0) = 0$とする．

(5) v_{D}を求めよ．

(6) 下線部(v)について，金属中の電流密度 $\boldsymbol{J}$をv_{D}用いて表せ．ただし，自由電子密度をnとする．さらに，自由電子はオームの法則を満足していることを示せ．

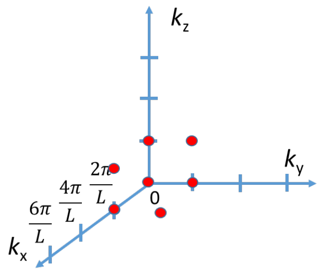
出題の意図

金属結晶中の自由電子の挙動について，波動関数，電子エネルギーおよび波数に関する知識と理解，ならびに電界中の自由電子の挙動についての理解を問う．

解答例

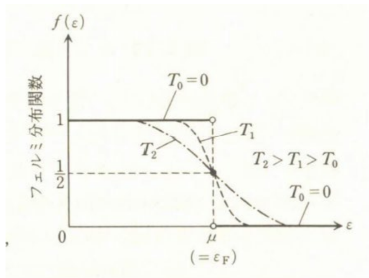
(1) ①$(\frac{2\pi}{L}n_x, \frac{2\pi}{L}n_y, \frac{2\pi}{L}n_z)$　②$\frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|^2}{2m}$ ③$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ ④$\frac{L^3}{3\pi^2}{k_F}^3$ ⑤$\frac{\hbar\boldsymbol{k}}{m}$,　⑥　$\frac{1}{2}m{v_F}^2$,　⑦　0，⑧　原子の格子振動（フォノン），⑨　格子欠陥（空孔，転位など）⑩　不純物原子，⑪　ドリフト速度

(2)



(3)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{exp\{(\varepsilon - \mu)/k_BT\} + 1}$$



(3) 続き：フェルミエネルギーよりも少し低いエネルギー状態に存在する電子（およそε_Fよりk_BTのエネルギー範囲）は、熱エネルギーを得てε_Fより高エネルギー状態に励起されるため。

(4)　$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -qE - cv_x$

$$v_x = \frac{qE}{c}\exp\left(-\frac{c}{m}t\right) - \frac{q}{c}E$$

(5)　$v_x(\infty) = v_D = -\frac{q}{c}E$

(6)　$j = qv_Dn = -\frac{q^2}{c}nE$　となるので、$j \propto$ E　となりオームの法則を満足している。

問題８（原子物理学）

［１］ 水素原子の電子の軌道半径を考える．ここで，電子は原子核の周りを円形軌道で周回していると仮定する．以下の小設問に従い定常状態における軌道半径 r を求めなさい．なお，定常状態では電子のド・ブロイ波長をλとしたとき，$2\pi r = n\lambda$ （n は正の整数）という量子条件が成り立つとする．

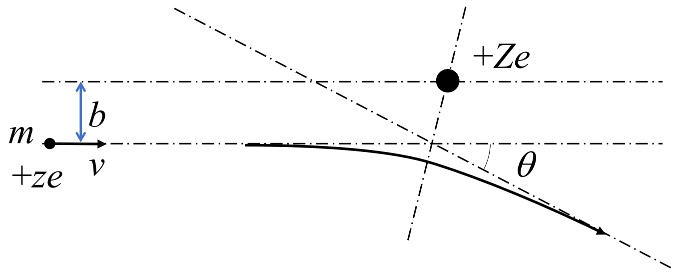
(1) 量子条件 $2\pi r = n\lambda$ より，電子の運動量 p をプランク定数 h および r , n を用いて示しなさい．

(2) 電子は原子核の周りを円形軌道で周回するとする．軌道半径を r, 周回運動の角速度を ω としたとき，電子に働く遠心力を，電子の質量 m, r および ω を用いて示しなさい．

(3) 各々電荷 $+e$ および $-e$ を有する水素原子核と電子の間に働くクーロン力を電子の素電荷 e ，真空の誘電率 ε_0 および r を用いて示しなさい．

(4) クーロン力と遠心力が釣り合うことを考慮し，電子の軌道半径 r を，m , e , h , ε_0 , n を用いて示しなさい．

［２］ ラザフォード散乱の断面積の散乱角依存性について考える．今，質量 m，電荷 $+ze$, 速度 v の荷電粒子が，この荷電粒子より十分重く電荷 $+Ze$ の原子核によって散乱されることを考える．図のように衝突係数 b で入射した荷電粒子は散乱角 θ で散乱されるとする．



(1) 荷電粒子と原子核間に働くクーロン力を考えると, 衝突係数 b と散乱角 θ の間には, 以下のような関係が成り立つ．

$$b = \frac{R_c}{2\tan\frac{\theta}{2}} \qquad \text{ここで，} R_c = \frac{zZe^2}{2\pi\varepsilon_0 m v^2} \text{ である．}$$

散乱角が θ と $\theta + \mathrm{d}\theta$ の範囲に散乱される断面積 $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\theta$ を求めなさい．

(2) （1）で求めた断面積は，散乱角が θ と $\theta + \mathrm{d}\theta$ の範囲に散乱される断面積であった（散乱角が θ であれば，方位角はどちらの方向でも良い）．この微小角度の範囲に対応する立体角 dΩを考え，散乱角 θ と $\theta + \mathrm{d}\theta$ の範囲の単位立体角あたりに散乱される断面積 $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega$ を求めなさい．

解答例

［１］

(1)

ド・ブロイ波長と運動量の関係は$p=h/\lambda$．従って

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{2\pi r}n$$

(2) 遠心力Fは　$F=mr\omega^2$

(3) クーロン力Fは　$F=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(4) 上の関係よりクーロン力と遠心力が釣り合うので　$mr\omega^2=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$である．

運動量p^2は$p^2=\left(mr\omega\right)^2=mr\left(mr\omega^2\right)=\dfrac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\left(\dfrac{h}{2\pi r}n\right)^2$

が成り立つので，

$$r=\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{4\pi^2 me^2}n^2=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}n^2$$

［２］

(1) 荷電粒子が単位面積当たりビーム強度密度 n でこの原子核に照射されたとすると，散乱角が θ とθ + dθの範囲に散乱される粒子の数は

$$nd\sigma\left(\theta\right)=n\cdot 2\pi b\left|db\right|=2\pi n\frac{R_c}{2\tan\frac{\theta}{2}}\left|\frac{R_c}{2}\frac{-\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}d\theta\right|$$

$$=n\pi\left(\frac{R_c}{2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}d\theta$$

従って$\dfrac{d\sigma\left(\theta\right)}{d\theta}=\dfrac{\pi R_c{}^2}{4}\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$

(2) 散乱角が θ とθ + dθの範囲に対応する立体角 $d\Omega$は，$d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$である．つま

り，

$$d\sigma(\theta)=\frac{\pi R_c{}^2}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}d\theta=\frac{\pi R_c{}^2}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2\pi\sin\theta}d\Omega$$

従って，

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}=\frac{\pi R_c{}^2}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2\pi\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\left(\frac{R_c}{4}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

配点

［１］30 点

(1) 5 点

(2) 5 点

(3) 5 点

(4) 15 点

［２］20 点

(1) 10 点

(2) 10 点

問題８（原子物理学）

【出題意図】

［１］　量子条件を用いてボーア半径に関する知識を問う.

［２］　ラザフォード散乱断面積に関する知識を問う.

問題８ （原子物理学）

【解答】

［１］

(1) $p = \dfrac{h}{2\pi r} n$

(2) $F = mr\omega^2$

(3) $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(4) $r = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$

［２］

(1) $\dfrac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \dfrac{\pi R_c{}^2}{4} \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\theta}{2} \tan \dfrac{\theta}{2}}$

(2) $\dfrac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\dfrac{R_c}{4} \right)^2 \dfrac{1}{\sin^4 \dfrac{\theta}{2}}$