令和７年８月 19 日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和８年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

１．　問題１は必須問題とする。問題２と問題３は選択問題でありどちらか１題を選択すること。合計２題を解答すること。

（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（必須）

［1］（1）ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,-1,0)$, $\boldsymbol{c}=(-1,2,3)$ を列ベクトルとする行列$\boldsymbol{D}$の固有値を求めよ。

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

（2）行列$\boldsymbol{D}$を対角化する行列$\boldsymbol{P}$、及びその逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$を示し、行列$\boldsymbol{D}$を対角化せよ。

（3）ベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$が張る平面に対する法線ベクトル$\boldsymbol{n}$、及び、平面上に点$(x,y,z)=(1,1,1)$が含まれる場合の平面の方程式を示せ。

（4）ベクトル $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{n}+t\boldsymbol{c}$ の絶対値 $|\boldsymbol{p}|$ を最小とする t の値 $t_{\min}$ を求めよ。

（5）ベクトル $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{n}+t_{\min}\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{c}$ の位置関係を根拠を示しつつ説明せよ。

［2］下記の積分を実行せよ。

（1）$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$

（2）$\int_0^{1} \ln\left(1+2\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$

［3］下記の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ。

（1）$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y=\dfrac{2}{x}$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y\sin x-\sin x=0$

問題２（選択）

［１］ zを複素数するとき、$z^3=-8i$の解をすべて求め、解は複素平面上に図示せよ。

［２］ 複素数zの方程式 $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$ $(z\neq-1)$で与えられる図形を描け。

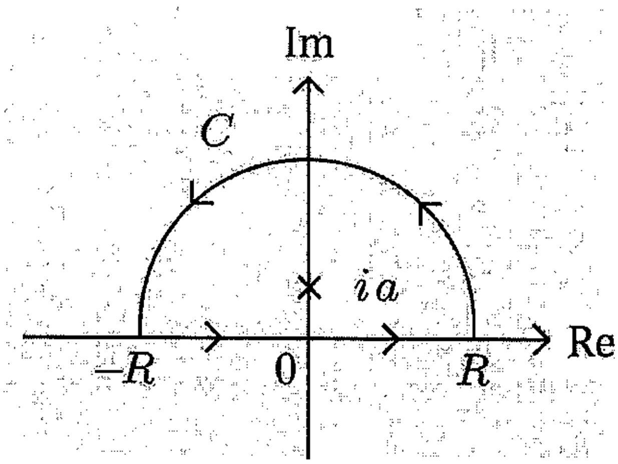
［３］ 複素数zの複素関数 $\frac{e^z}{(z+i\pi)^3}$ の特異点における留数を求めたい。以下の問いに答えよ。

（１） 複素関数 e^z の$z=-i\pi$ を中心としたテイラー展開を求めよ。

（２） 複素関数 $\frac{e^z}{(z+i\pi)^3}$ の $z=-i\pi$を中心としたローラン展開を求め、$z=-i\pi$における留数を求めよ。

［４］ 以下の実積分の式を図の複素平面における積分路と留数定理を用いて証明せよ。自明なこと以外省略しないこと。

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2} \qquad (x,a\in\mathbb{R},a>0)$$



問題３（選択）

［１］ 関数$f(t)=\left|\cos\left(\frac{\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)\right|$（ただし、$0<T<1, f(t)=f(t+T)$）の複素フーリエ級数を求める。以下の問いに答えよ。

（１）関数$f(t)$をグラフに示せ。

（２）複素フーリエ係数 c_n（nは整数）はnが奇数のとき０となることを示せ。

（３）複素フーリエ級数を求めよ。

［２］関数$f(t)$のラプラス変換を以下の様に定義する。

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

以下の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

（１）$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+4f(t)=\sin 2t \qquad \left(f(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t}=0\right)$

（２）$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+f(t)=\delta(t-\pi) \qquad \left(f(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t}=0\right)$

ただし、$\mathcal{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}, \mathcal{L}[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}, \mathcal{L}[t\sin\omega t]=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$とする。

数学　出題意図

問題１（必須）

［１］
固有値、逆行列、対角化等の行列に関する基本的な知識と導出能力，ベクトル空間に関する基本事項や空間イメージ力を問う。
［２］
基本的な積分の理解と実行能力を問う。
［３］
微分方程式の理解と解を導く能力を問う。

問題２（選択）

［１］
極形式の複素数の基本的な取り扱いに関する知識と理解、ならびに複素平面上に解を図示する能力を問う。
［２］
複素数からなる有理関数の基本的な取り扱いに関する知識と理解、ならびに複素関数の幾何学的性質を図示する能力を問う。
［３］
ローラン展開に関する知識と理解、ならびにそれを留数の計算に応用する能力を問う。
［４］
留数定理に関する知識と理解、ならびにそれを定積分の計算に応用する能力を問う。

問題３（選択）

［１］
波動・振動解析に必要な複素フーリエ級数の基礎的な知識について、具体的な周期関数を例に問う。
［２］
デルタ関数や三角関数を含む微分方程式をラプラス変換を用いて解けるかどうかを問う。

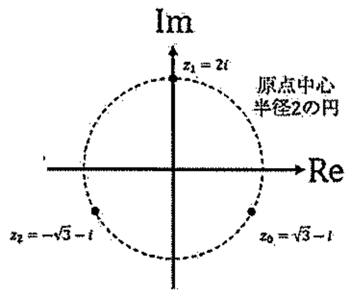
数学　解答例

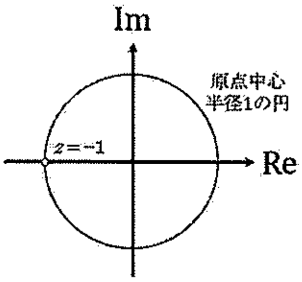
問題１（必須）

［１］	(1)	固有値は 1, −1, 5
	(2)	$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1/2 & 7/2 & 1/2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$、$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 3/4\\ 0 & 1/3 & -1/6\\ -1/2 & 1/6 & 5/12\end{pmatrix}$、$P^{-1}DP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$
	(3)	法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(2,-4,5)$、平面の方程式 $2x-4y+5z=3$
	(4)	$t_{\min}=-\dfrac{5}{14}$
	(5)	$(\boldsymbol{n}+t_{\min}\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0$ より、 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{c}$ に対して垂直である。
［２］	(1)	-2π
	(2)	$\dfrac{3}{4}\ln 3$
［３］	(1)	$y=-\dfrac{1}{2x}+Cx^3$
	(2)	$y=C\exp(-2\cos x)-\dfrac{1}{2}$

問題２（選択）

［１］	$z_0=\sqrt{3}-i$ $z_1=2i$ $z_2=-\sqrt{3}-i$



[2]		
[3]	(1)	$-1-(z+i\pi)-\frac{1}{2}(z+i\pi)^2-\frac{1}{6}(z+i\pi)^3$ $-\frac{1}{24}(z+i\pi)^3-\cdots$
	(2)	$-\frac{1}{(z+i\pi)^3}-\frac{1}{(z+i\pi)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+i\pi)}-\frac{1}{6}-\frac{1}{24}(z+i\pi)-\cdots$ 留数は$-\frac{1}{2}$となる。
[4]	複素関数 $f(z)=\frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}$ とおき、複素上半面に原点中心半径 R の十分大きな半円を一周する経路をＣとして、 $\oint_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz$ の積分を考える。 $f(z)$ の経路Ｃ内に含まれる特異点は $z = ia$ であることから、留数定理より $\oint_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz=\oint_C \frac{1}{(z-ia)}\frac{z\,e^{iz}}{(z+ia)}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(ia)=2\pi i\frac{e^{-a}}{2}$ $=i\pi e^{-a}$ また、経路Ｃを実軸上と複素上半面の半円部分Ｃ’にわけると、 $\oint_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz=\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx+\int_{C'}\frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz$ ここで、$z = Re^{i\theta}$ とおくと、$dz = iRe^{i\theta}d\theta$ より $\int_{C'}\frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{Re^{i\theta}e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}\left(iRe^{i\theta}\right)d\theta$	

$$\left|\int_{C'} \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz\right| \le \int_{C'} \left|\frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}\right| |dz|$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{R^2\left|e^{i\theta}\right|\left|e^{iR\cos\theta}\right|e^{-R\sin\theta}}{R^2\left|e^{2i\theta}\right|+a^2}\left|ie^{i\theta}\right|d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{-R\sin\theta}}{R^2+a^2}d\theta$$

この積分範囲において sin　θ は正の値をとることから、

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C'} \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{-R\sin\theta}}{R^2+a^2}d\theta = 0$$

従って、

$$\oint_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + i\sin x)}{x^2+a^2}dx$$

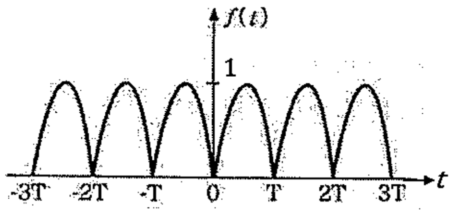
左辺 ＝ $i\pi e^{-a}$より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \pi e^{-a}$$

被積分関数が偶関数であることから

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

問題 3（選択）

<table>
<tr><td rowspan="3">[1]</td><td>(1)</td><td>

$f(t) = \left|\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right|$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>偶数　$c_n = \frac{-2}{(4n^2-1)\pi}$,　奇数　$c_n = 0$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{(4n^2-1)\pi} e^{in\omega t}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[2]</td><td>(1)</td><td>$f(t) = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$f(t) = -u(t-\pi)\sin t, u$: ステップ関数</td></tr>
</table>