令和６年８月１９日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和７年度修士課程入学試験

「専門科目」についての注意

試験時間　１４：３０〜１６：４５

1. 以下の８題より３題を選択し、解答せよ。
（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
（配点：各題５０点、合計１５０点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題1（力学）

[1] 図1のように、ばね（ばね定数k、自然長aで質量は無視できる）の一端に質量mの質点をつなぎ、もう一方の端に質量Mの質点をつないで、摩擦の無視できる台上に置く。このばねをつりあいの位置からLだけ伸ばす。このときの質量m、Mそれぞれの質点位置をx_0, X_0とする。その後、時刻$t=0$で静かに手を離す。

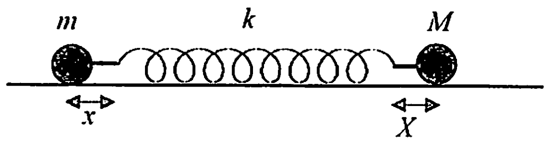
(1) 手を離す前の２つの質点の重心の位置を、m, M, x_0, X_0を用いて表わせ。

(2) 手を離した後の２つの質点のつりあい位置からのそれぞれの変位を、x, Xとして運動方程式を示せ。

(3) (2)を解いて、手を離した後のそれぞれの質点の変位x, Xの時間変化を説明せよ。

(4) 手を離した後の重心位置の速度および加速度を説明せよ。

図1



[2] 図2に示すように水平に距離aだけ離れた２点から長さLの糸で質量がm, Mの質点をつるし、両質点をばね（ばね定数k、自然長aで質量は無視できる）でつなぐ。この２つの質点を共通の鉛直面内で微小振動させた。糸が鉛直方向から角度θ_1、θ_2変位した位置におけるそれぞれの質点の座標を、$(L\sin\theta_1, L\cos\theta_1)$ および $(a+L\sin\theta_2, L\cos\theta_2)$ として以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度は g であり糸の質量は無視できる。

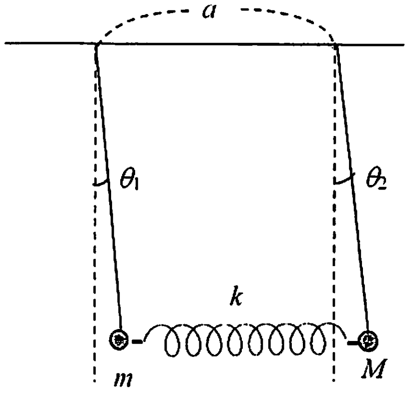
(1) この系の運動エネルギーを求めよ。

(2) この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。ただし、ばねは水平方向のみに伸びると考えてよい。また、それぞれの質点の最下点を重力による位置エネルギーの原点とせよ。

(3) この系のラグランジアンを求め、それぞれの質点の運動方程式を記せ。

(4) 微小振動の場合は$\sin\theta_i \approx \theta_i$, $\cos\theta_i \approx 1$ ($i = 1, 2$)と近似できる。運動方程式を解いて、角 θ_1, θ_2の一般解を求めよ。

図2



問題２（物理化学）

［１］二酸化炭素(CO_2)の性質に関する以下の問いに答えよ。なお，計算は有効数字を２桁とし，計算手順も分かり易く整理して示すこと。

(1) CO_2の状態図(相図)を，縦軸：圧力，横軸：温度として描き，特徴的な点をその名称とともに示せ。

(2) 1成分系での可変度(自由度)$\boldsymbol{F}$を表すギブスの相律式を示し，(1)で描いた相図中のそれぞれの場所に可変度$\boldsymbol{F}$の値を追記せよ。

(3) (1)で描いた相図中に圧力 1 atm の線を追記し，CO_2が 1 atm において固相から気相に昇華することを説明せよ。

(4) ２相(α, β)の境界の勾配(dp/dT)を表すクラペイロンの式を，化学ポテンシャルの平衡式($d\boldsymbol{\mu}(\alpha)=d\boldsymbol{\mu}(\beta)$)から導出せよ。ここで，使用する記号は常用のものとせよ。

(5) CO_2の 1 atm, 195 K 近傍における固相−気相境界の勾配(dp/dT)の値を下表の値を使って求めよ。ここで，1 [Pa] = 1 [J m^{-3}] = 10^{-5} [atm] とせよ。

On a state of 1 atm and 195 K	CO_2 (solid)	CO_2 (gas)
モル体積 V_m [m^3 mol^{-1}]	2.8×10^{-5}	1.5×10^{-2}
モルエントロピーS_m [J K^{-1} mol^{-1}]	50	210

［２］以下に示す二酸化炭素(CO_2(gas))の水への溶解反応を考える。ここで，(aq)は溶存状態を表し，Kは平衡定数，a_{H2CO3}は炭酸(H_2CO_3(aq))の活量，P_{CO2}はCO_2(gas)の圧力を表す。

CO_2 (gas) + H_2O = H_2CO_3 (aq)　　$K = a_{H2CO3} / P_{CO2}$　　………①

以下の問いに答えよ。なお，計算は有効数字を２桁とし，計算手順も分かり易く整理して示すこと。

(1) 下表に示す各成分の標準生成ギブスエネルギー($\Delta_f G°$)の値を用いて，反応①の温度 298 K における標準反応ギブスエネルギー($\Delta_r G°$)の値を求めよ。

On a standard state of 1 atm and 298 K	CO_2 (gas)	H_2O	H_2CO_3 (aq)
標準生成ギブスエネルギー $\Delta_f G°$ [kJ mol^{-1}]	-390	-240	-620

(2) 上記(1)で求めた$\Delta_r G°$の値を用いて，反応①の 298 K における平衡定数の自然対数 ln K の値を求めよ。ここで，気体定数は R=8.3 JK^{-1}mol^{-1} とし，温度は簡単のため 300 K とせよ。

(3) 反応①で水に溶解した H_2CO_3 (aq)は以下の反応で解離する。

H_2CO_3 (aq) = HCO_3^- + H^+　　……… ②

HCO_3^- = CO_3^{2-} + H^+　　……… ③

反応①, ②, ③の平衡定数をそれぞれ K_{CO2}, K_1, K_2 とする。平衡状態での H_2CO_3 (aq) の活量 a_{H2CO3} および HCO_3^-の活量 a_{HCO3-}を，K_{CO2}, K_1, P_{CO2}, a_{H+} (H^+の活量)を用いて表せ。

(4) 大気中の CO_2 (gas)の分圧を P_{CO2} = 420 x 10^{-6} atm = 10$^{-3.4}$ atm とした時，298 K において大気と平衡にある水の pH を求めよ。ここで，K_{CO2}, K_1, K_2 は下表の値を用い，また，弱酸性の条件では次の関係が成り立つものとせよ。$a_{H+} \gg a_{OH-}$, $a_{HCO3-} \gg a_{CO3\,2-}$

T	K_{CO2}	K_1	K_2
298 K	$10^{-1.5}$	$10^{-6.4}$	$10^{-10.3}$

問題３　（熱力学／統計力学）

［１］小正準集団、正準集団、大正準集団に関する以下の設問(1)～(6)に答えよ。いずれの場合も体系に含まれる粒子数は N とする。また、ボルツマン定数を k_B、温度を T とする。

(1) 小正準集団において、体系を構成する一つの粒子のエネルギーを e_i とする。i は粒子が取り得るエネルギー状態を表す添え字である。小正準集団に対する分配関数 f を i に関する総和の形で（積分ではなく加算の形で）書き表せ。

(2) 小正準集団において、一つの粒子のエネルギーが e_i となる確率を p_i とする。p_i を f、e_i、k_B、T を用いて書き表せ。さらに、体系が示すヘルムホルツの自由エネルギー F と分配関数 f の関係を書き表せ。

(3) 正準集団において、一つの体系のエネルギーを E_j とする。j は体系が取り得るエネルギー状態を表す添え字である。正準集団に対する分配関数 Z を j に関する総和の形で（積分ではなく加算の形で）書き表せ。

(4) 正準集団において、一つの体系のエネルギーが E_j となる確率を p_j とする。p_j を Z、E_j、k_B、T を用いて書き表せ。さらに、体系が示すヘルムホルツの自由エネルギー F と分配関数 Z の関係を書き表せ。

(5) 大正準集団において、一つの体系のエネルギーを $E_{k,N}$ とする。k は体系が取り得るエネルギー状態に関する添え字である。大正準集団に対する分配関数（大分配関数）Z_G を k と N に関する総和の形で（積分ではなく加算の形で）書き表せ。なお、Z_G の記述においてはフガシティ λ を用いること。λ は化学ポテンシャル μ に対して $\lambda = \exp(\mu/k_BT)$ という関係にある。

(6) 正準集団の分配関数 Z が N、T、体積 V に依存し、関数 $Z(N,T,V)$ と表現できるものとする。この場合、大分配関数 Z_G と分配関数 Z には①式のような関係があることを示せ。なお、①式においては、N の範囲を $0 \leq N \leq \infty$ と考えている。

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \, Z(N,T,V) \qquad ①$$

［２］粒子間（分子間）の相互作用を無視できる単原子分子理想気体について考える。体系外部とのエネルギーの交換や粒子の交換は無視できるものとする。体系を構成する粒子（分子）の総数は N であり、各粒子のエネルギーを以下の通り e_{i1}、e_{i2}、… e_{iN} と表す。この体系について、以下の設問(1)～(4)に答えよ。

粒子１のエネルギー　e_{i1}　（$i1$ は粒子１が取り得るエネルギー状態を表す添え字）
粒子２のエネルギー　e_{i2}　（$i2$ は粒子２が取り得るエネルギー状態を表す添え字）
⋮　　　⋮
粒子 N のエネルギー　e_{iN}　（iN は粒子 N が取り得るエネルギー状態を表す添え字）

（裏面にも問題は続きます）

(1) 体系のエネルギーを E_j とする。j は体系が取り得るエネルギー状態を表す添え字である。E_j を e_{i1}、e_{i2}、$\cdots$ e_{iN}を用いて書き表せ。

(2) 正準集団の立場でこの体系に関わる分配関数 Z を考える。Z をe_{i1}、e_{i2}、$\cdots$ e_{iN}、k_B、Tを用いて書き表せ。

(3) 問 2 (2)で求めた Z から記述されるヘルムホルツの自由エネルギーは、問 1 (2)で求めた小正準集団に対するヘルムホルツの自由エネルギーと一致することを示せ。

(4) この体系における粒子 1 個あたりのエネルギーの平均値 $\langle e \rangle$ が $3k_\mathrm{B}T/2$ となることを示せ。粒子のエネルギーは運動エネルギーのみ考慮すれば良いものとする。また必要に応じて、温度に関わる表現 $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ を用いて良いものとする。

問題４（電磁気学）

式(a)～(e)は静的な電場と磁場に関する式である。式中の記号は、$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、ϕは電位、ρは電荷密度、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、$\boldsymbol{r}$ は位置、ε_0は真空の誘電率、μ_0は真空の透磁率である。以下の問いに答えよ。

$$\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(a)}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(c)}$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \qquad \text{(d)}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi \qquad \text{(e)}$$

(1) 式(a)～(d)はマクスウェル方程式である。式(d)を記せ。

(2) 式(e)が成り立つとき、式(b)が成り立つことを示せ。

(3) 式(a)と式(e)から次式を導出せよ。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(f)}$$

(4) 式(f)を用いて次の問いに答えよ。

① ある点の電位が直交座標系で $\phi(x) = x^3 + x^2 + 2x$ で与えられる時、空間の電荷密度を求めよ。

② 極板間に電荷が一様に分布する平行平板が、真空中に置かれている。平板は互いに距離 d だけ離れており、両方とも接地されている。平板内の電位の分布および電場の分布を求めよ。ただし一方の極板からの距離を x とする。

(5) マクスウェル方程式のうちの一つを使って次式を導出せよ。

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I \qquad \text{(g)}$$

ただし C は周回経路であり、I はそれを貫く電流である。

(6) 式(g)は一般に何と呼ばれるか。

(7) 無限に長い直線電流 I から距離 a だけ離れた点の磁束密度の大きさを求めよ。

問題５（量子力学）

[１] 物理量Aに関する演算子を$\hat{A}$、固有値をa_n、固有関数を$\psi_n(x,t)$として、規格化された波動関数$\psi(x,t)$がc_nを係数として以下のように表されるとする。

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x,t)$$

Aを測定した場合に測定値としてa_nが得られる確率が$|c_n|^2$であることから、Aの期待値$\langle A \rangle$は以下のように表される。

$$\langle A \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n$$

固有関数の規格直交性$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$を考慮することで、$\langle A \rangle$が以下のように表されることを示せ。

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

[２] 三次元の中心ポテンシャル$V(r)$に質量mの粒子１個が束縛されている場合について考える。この粒子のハミルトニアン$\hat{H}$は、極座標(r,θ,ϕ)を用いて以下のように表される。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\left(\Delta_r + \Delta_{\theta,\phi}\right) + V(r), \qquad \Delta_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right), \qquad \Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

また、角運動量演算子$\hat{\boldsymbol{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z)$の$z$成分$\hat{l}_z$と角運動量の大きさの２乗の演算子$\hat{\boldsymbol{l}}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$は、極座標$(r,\theta,\phi)$を用いて以下のように表される。

$$\hat{l}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \hat{\boldsymbol{l}}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\phi},$$

(1) 時間を含まないシュレディンガー方程式を変数分離すると、角度部分$Y(\theta,\phi)$の微分方程式として

$$\Delta_{\theta,\phi} Y(\theta,\phi) = -\lambda Y(\theta,\phi)$$

が得られる。λは分離定数である。$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$としてこの微分方程式を$\theta$方向と$\phi$方向の微分方程式に分離すると、$\nu$を分離定数として以下の$\phi$方向の微分方程式が導かれることを示せ。

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi) + \nu\Phi(\phi) = 0$$

(2) (1)のϕ方向の微分方程式を解き、境界条件と規格化条件を考慮して$\Phi(\phi)$を求めよ。

(3) $Y(\theta,\phi)$が$\hat{l}_z$の固有関数であることを示せ。またその固有値を求めよ。

(4) $Y(\theta,\phi)$が$\hat{\boldsymbol{l}}^2$の固有関数であることを示せ。またその固有値を求めよ。

(5) 以下の(a)(b)(c)の交換関係を計算せよ。計算過程も記すこと。

(a) $[\hat{\boldsymbol{l}}^2, \hat{l}_z]$, (b) $[\hat{H}, \hat{l}_z]$, (c) $[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{l}}^2]$

問題６（輸送現象論）

［１］ 直径dの水平円管内を流れるニュートン流体を考える。流れは十分に発達した層流であり、円管の長さlの間での圧力損失の大きさをΔpとするとき、以下の問いに答えよ。但し、流体の密度ρ及び粘性係数μは一定であるものとする。

（１） 管軸方向の流体の速度uが次の運動方程式を満たすとき、速度分布は管中心（$r = 0$）で最大値となる放物面となることを示せ。但し、管壁で流体の速度はゼロとする。

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{l}$$

（２） 管断面での流体の平均速度をu_m、最大速度をu_{max}とするとき、$u_m = u_{max}/2$となることを示せ。

（３） 流れの速度勾配に伴って管壁に働くせん断応力τ_wによって生じる摩擦力は、円管長さlの間での圧力損失Δpとバランスする。このとき、長さlの円管に働く摩擦力がΔpに比例することを示せ。

（４） 円管の摩擦係数C_fは、τ_wの大きさが動圧$\rho u_m^2/2$に比例するとしたときの比例係数として次式で定義される。

$$C_f = \frac{|\tau_w|}{\rho u_m^2/2}$$

このときC_fは無次元数$\rho u_m d/\mu$に反比例して減少することを示せ。

（５） $\rho u_m d/\mu$は一般に何と呼ばれる無次元数か。また、その物理的意味について簡単に説明せよ。

［２］ 次の文章は、対流熱伝達に関する説明である。（ １ ）～（ ７ ）の空所に適当な語句、式、単位のいずれかを挿入せよ。

固体壁とそれに沿って流れる流体との間の対流熱伝達を考える。この場合、伝熱面積 A、温度 T_w の固体壁面からバルク温度 $T_b(< T_w)$の流体への単位時間当たりの伝熱量が$Q_w =$（ １ ）で表されるとき、この式に表れる h は熱伝達係数と呼ばれ、その単位はSI単位で（ ２ ）である。また、伝熱面において熱は熱伝導のみによって輸送されるので、固体壁から固体壁に垂直に流体側が正になるように座標軸yを定め、伝熱面における流体の温度勾配を$\left.\frac{dT}{dy}\right|_w$、流体の熱伝導率を$k$とすると、熱輸送に関する（ ３ ）の熱伝導法則より$Q_w =$（ ４ ）とおくことができる。従って、$N_u \equiv$（ ５ ）によって定義される（ ６ ）数は、$\left.\frac{dT}{dy}\right|_w$を用いて表すと $N_u =$（ ７ ）となる。ここで、l は伝熱面の大きさを表す流路の代表長さである。この式から、（ ６ ）数が伝熱面における流体の温度勾配と熱伝導のみが生じる場合の流体の温度勾配の比を代表する無次元数であることが分かる。

問題７（固体物理学）

結晶の原子間ポテンシャルと格子振動に関する以下の問いに答えよ。

(1) 一般に、結晶中の原子間ポテンシャル($V(r)$)は引力項と斥力項の和により表される。ここで、rは原子間距離である。$V(r)$をrの関数として図示せよ。図中には引力項と斥力項をそれぞれ示し、原子の平衡位置 r_0も示せ。

(2) $V(r)$は r_0に対して非対称となっている。結晶が熱膨張する理由を$V(r)$の非対称性から説明せよ。

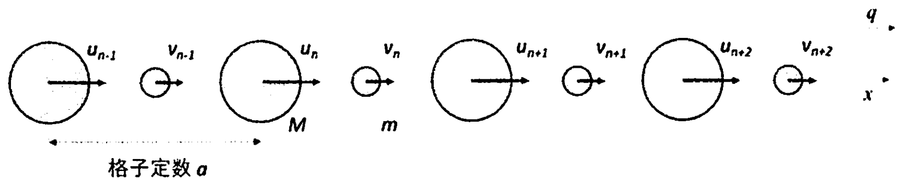
質量Mの同種原子が多数、等間隔で並んでいる一次元格子を考える。原子間隔をaとし、$V(r)$はr_0を中心にrに対して対称な関数であるとする。すなわち、r_0からの原子位置の変位をuとし、$V(r)$をuを用いて $V(u) = \frac{1}{2}bu^2$ と表す。bは定数である。また、一次元格子中のn番目の原子の平衡位置からの変位を$u_n(r,t)$と表す。ここで、tは時刻である。原子間に働く力は、最近接原子からの力のみを考慮する。

(3) n番目の原子の運動方程式を表せ。

(4) 波数をq 、角振動数をωとすると、n番目の原子の変位は $u_n(na,t) = Ae^{i(\omega t - qna)}$ と表わされる。分散関係を導出し、第２ブリユアン領域までの範囲に対して図示せよ。

(5) 波束の群速度の絶対値（波束の速さ）が最大および最小となる波数を示せ。また、その時の速さを示せ。

次に、図のように質量Mとm ($M > m$)の 2 種類の原子が交互に等間隔で並んでいる一次元格子を考える。原子間距離は$\frac{a}{2}$ とし（格子定数：a)、n番目の質量Mの原子の平衡位置からの変位を$u_n(r,t)$、質量mの原子の平衡位置からの変位を$v_n(r,t)$と表す。原子間ポテンシャルは$V(u) = \frac{1}{2}bu^2$、または$V(v) = \frac{1}{2}bv^2$で表されるものとする。この格子においても、原子間に働く力は最近接原子からの力のみを考慮するものとする.



(6) n番目の質量Mおよびmの原子の運動方程式をそれぞれ表せ。

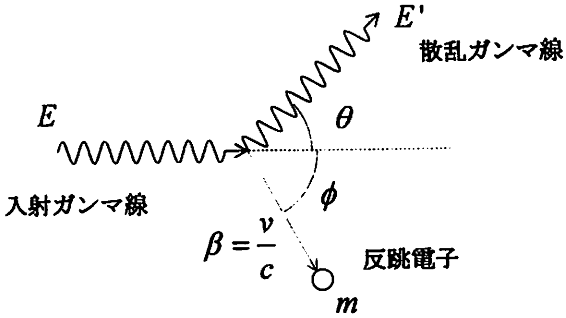
(7) 波数を q, 角振動数をωとすると、n番目の原子の変位は質量Mおよびmの原子に対して、それぞれ $u_n(na,t) = Ae^{i(\omega t - qna)}$ 、および$v_n(na,t) = Be^{i(\omega t - qna)}$と表わされる。ただし、$A$および$B$は定数である。分散関係を導出せよ。

(8) $0 \leq q \leq \frac{\pi}{a}$ の範囲に対して分散関係の概略図を示せ。

(9) (8) にて求めた 2 つの分散関係は音響的振動および光学的振動と呼ばれている。このように呼ばれる理由を簡単に説明せよ。

問題８（原子物理学）

［１］ガンマ線と電子の相互作用について考える。束縛されていない電子にエネルギーEのガンマ線が衝突することを考える。下図のように、入射ガンマ線は散乱角θでコンプトン散乱され、電子は反跳角ϕで反跳される。散乱ガンマ線のエネルギーをE'とする。また、電子の静止質量はm、光速cに対する電子の相対速度はβ（$=v/c$）とする。以下の設問に答えよ。



(1) 入射ガンマ線の運動量、相対論を考慮した際の反跳電子の運動量および運動エネルギーをE、m、β、cを用いて示せ。

(2) 散乱前後の運動エネルギー保存の式を示せ。

(3) 散乱前後の運動量保存の式を示せ。

(4) 散乱ガンマ線のエネルギーE'を、E、m、c、θを用いて示せ。

(5) 散乱ガンマ線の最小エネルギー$E'_{\min}$をE、m、cを用いて示せ。

(6) 束縛されていない電子に対して、ガンマ線の光電効果（吸収）を起こすことができない理由を説明せよ。

［２］相対論における速度の和の公式をローレンツ変換を用いて考える。静止している慣性系Ｓと、Ｓに対し速度v_1で等速直線運動している慣性系S'を考える。各々慣性系における時空座標は(x,ct)および(x',ct')で表す。速度の和を考えるということは、慣性系 S'の中において速度v_2で運動する物体の慣性系 S での速度を考えることと等価である。物体は慣性系 S'の中において速度v_2で運動しているので、物体が S'における

（裏面にも問題は続きます）

時刻t'に空間座標x'にあるとすると、$v_2=\dfrac{dx'}{dt'}$となる。

(1) この物体は、慣性系Sでは時刻tに空間座標xにある。慣性系Sから見たこの物体の速さv_3をx、tを用いて示せ。

(2) ローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \left(ここで\beta=\frac{v}{c}、\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

を用いて、慣性系Sから見たこの物体の速さv_3をv_1、v_2および高速cを用いて示せ。

(3) 静止してる慣性系に対し光速の50%の速度で移動している粒子Aから、前方方向にその粒子Aから見て速度vで粒子Bが放出される。静止している慣性系から見た粒子Bの速度が光速の80%である。この時、放出された粒子Bの粒子Aから見た速度vは光速の何%であったかを示せ。