令和６年８月 19 日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和７年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００〜１０：３０

1．　問題１は必須問題とする。問題２と問題３は選択問題であり、どちらか１題を選択すること。合計２題を解答すること。
　　（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

2．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
　　１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

3．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（必須）

［１］ ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,0,0)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{c}=(1,0,3)$ を列ベクトルとする行列$\boldsymbol{D}$を考える。

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

（１）行列$\boldsymbol{D}$に対して、固有値と固有ベクトルを求めよ。

（２）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{D}|$ を示せ。

（３）$|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{c}|$ を１つの頂点から出る３辺の長さとする平行六面体の体積を求めよ。

（４）ベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の始点を原点Ｏとし、それぞれの終点の座標を A, B, C とする。点 O, A, B, C が張る四面体の全表面積（４面の面積の和）を求めよ。

（５）上記の四面体に内接する球の半径を求めよ。

［２］（ ）に示す変数変換を行い、下記の積分を実行せよ。

（１）$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}\,\mathrm{d}x \qquad \left(p=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}\right)$

（２）$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (x=\tan\theta)$

［３］ 下記の微分方程式の解 $y(x)$ 、及び連立微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$を求めよ。

（１）$\displaystyle\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2y}{x}=y^3$

（２）$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y+2e^{2t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x}{2}+y-e^{2t} \end{cases}$

問題２（選択）

［１］以下の積分値を求めよ。

$$\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{\frac{z}{2}} dz \quad (z \in \mathbb{C})$$

［２］以下のz $(z \in \mathbb{C})$の関数を$z = i$を中心として$|z - i| < 2$の領域で、ローラン展開せよ。

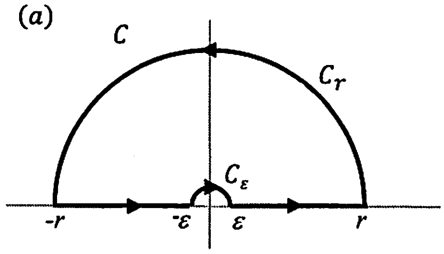
$$\frac{2z}{z^2 + 1}$$

［３］複素数の演算によって実積分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x (x \in \mathbb{R})$を求めたい。以下の問いに答えよ。

（１）右複素平面図(a)の閉じた積分路C（円弧C_r、実軸上の２つの直線、円弧C_εからなる）で以下の積分値を求めよ。

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z \ (z \in \mathbb{C})$$

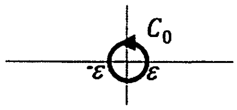
(a)



（２）右複素平面図(b)の閉じた積分路C_0で以下の積分値を求めよ。

$$\int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z \ (z \in \mathbb{C})$$

(b)



（３）(1)と(2)の結果と$|\varepsilon| \to 0, |r| \to \infty$の極限を考慮することによって以下の実積分値を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \ (x \in \mathbb{R})$$

問題３（選択）

［１］周期πの関数$f(x) = x^2 \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$について、以下の問いに答えよ。

（１） フーリエ級数に展開せよ。

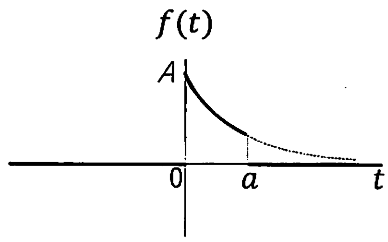
（２） 複素フーリエ級数に展開せよ。

［２］(a)，(b)で示す関数$f(t)$，$g(t)$のラプラス変換$F(s), G(s)$を求めよ。
ただし、関数$f(t)$，$g(t)$のラプラス変換を以下の様に定義する。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

また、必要であれば、$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}$，$\mathcal{L}[f(t-\beta)] = \exp(-s\beta)\mathcal{L}[f(t)]$を用いても良い。

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, a \le t) \\ A\exp(-bt) & (0 \le t < a) \end{cases}$



(b) $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0, 2a \le t) \\ A\exp(-bt) & (0 \le t < a) \\ -A\exp(-b(t-a)) & (a \le t < 2a) \end{cases}$