令和５年８月２１日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和６年度修士課程入学試験

「**専門科目**」についての注意

試験時間　１４：３０〜１６：４５

1. 以下の８題より３題を選択し、解答せよ。
（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学)
(配点：各題５０点、合計１５０点満点)

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。(裏面も使用可)

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（力学）

［1］質量 M, 大きさの無視できる質点が、固定されて動かない半径 r の滑らかな表面を持つ半球の最高点にのっている。図１に示すように、この質点がゆっくりと動きはじめ、その後に半球から離れていくときの運動を考える。ただし初速度は無視でき、重力加速度はgとする。

(1) 垂直抗力を T として質点の R 方向の運動方程式を記述せよ。ただし図１に示すように半球の中心Ｏから質点に向かう方向を R 方向ととる。また半球の最高点方向と質点のなす角をθとする。

(2) 質点の速度を V として、質点に関するエネルギー保存則を示せ。

(3) 質点が半球の表面から離れるときの角θ の満たすべき条件を求めよ。

［2］質量 M, 半径 a を持つ一様な小球が、固定されて動かない半径 r $(r > a)$の粗い表面を持つ半球の最高点にのっている。図２に示すように、この小球がゆっくりと動きはじめ、その後に半球から離れていくときの運動を考える。ただし初速度は無視でき、重力加速度はgとする。

(1) 質量 M, 半径 a の球の中心軸まわりの慣性モーメントが$I = \frac{2}{5}Ma^2$となることを示せ。

（計算過程も示すこと）

(2) 表面の転がり摩擦力を F, 垂直抗力を T として、小球の R 方向およびその垂直方向(θ 方向)についての運動方程式を記述せよ。ただし図２に示すように半球の中心Ｏから小球の中心に向かう方向を R 方向ととる。また半球の最高点方向と小球の中心に向かう方向のなす角をθとする。

(3) 小球と半球の間に滑りはないとする。小球の初期状態からの回転角をϕ とするとき、角θ とϕ の間に成り立つ関係を示せ。

(4) 小球と半球の間に滑りはないとした場合に、転がり落ちる小球が下の半球の表面から離れるときの角θ の満たすべき条件を求めよ。

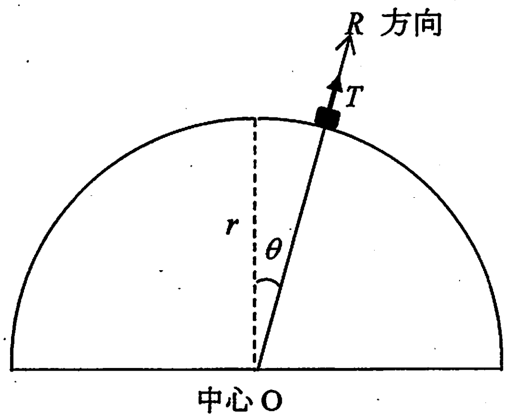


図１

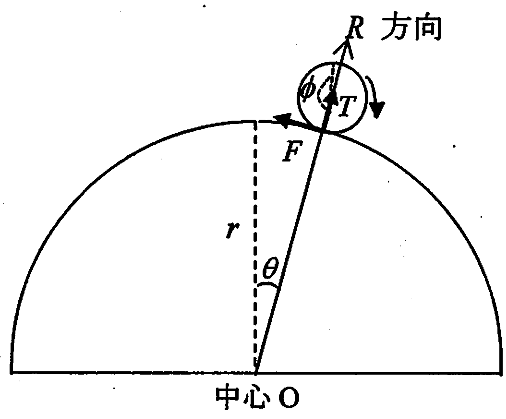
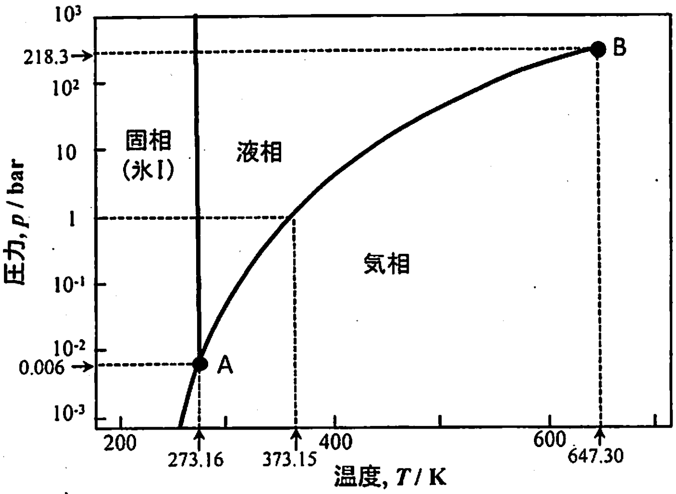


図２

問題２（物理化学）

[１] 水(H_2O)の相図（状態図）を下図に示す。以下の問いに答えよ。なお、計算は有効数字を２桁とし，計算手順も分かり易く整理して示すこと。



（出典：アトキンス物理化学（上）第10版　図4A・9に一部加筆修正）

(1) 相図中のＡ点およびＢ点の名称を示せ。

(2) 温度 273K, 圧力 1 bar 付近での固相-液相境界の傾き(dp/dT)をクラペイロンの式をもとに求めよ。ここで, 273 K, 1 bar における氷の標準融解モル体積と標準融解エンタルピーはそれぞれ, $\Delta_{fus}V = -1.6 \times 10^{-6}\ m^3mol^{-1}$ および $\Delta_{fus}H = 6.0\ kJK^{-1}mol^{-1}$ であるとする。

(3) 上記(2)で求めた固相-液相境界の傾き(dp/dT)が圧力の広い範囲で一定であるとして, 圧力を 1 bar から 100 bar に加圧した時の氷の融点の変化量を求めよ。

(4) 通常の物質では, 固相-液相境界の傾き(dp/dT)は正の値となり, 圧力の増加とともに融点は高くなるが, 水については相図および上記(2), (3)の結果のように dp/dT は負の値となり, 圧力の増加とともに融点が低くなる。その理由を氷の融解モル体積と結晶構造および水分子の特性から説明せよ。

[２] 炭酸カルシウムの多形の一つである方解石($CaCO_3$(calcite))について, 次の溶解・析出反応を考える。ここで, (aq)は溶存状態を表す。

$$CaCO_3(calcite) \rightleftarrows Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

以下の問いに答えよ。なお, 計算は有効数字を２桁とし, 計算手順も分かり易く整理して示すこと。

(1) 下表に示す各成分の標準状態での熱力学データを用いて, 反応①の 298K における標準反応エンタルピー($\Delta_r H^\circ$)と標準反応エントロピー($\Delta_r S^\circ$)を求めよ。

On a standard state of 1 bar and 298 K	Ca^{2+}(aq)	CO_3^{2-}(aq)	$CaCO_3$(calcite)
標準生成エンタルピー $\Delta_f H^\circ$/kJ mol^{-1}	-540	-670	-1200
標準エントロピー S_m°/JK^{-1}mol^{-1}	-60	-50	90

(2) 上記(1)の結果を用いて, 反応①の 298K における標準反応ギブスエネルギー($\Delta_r G^\circ$)の値を求めよ。

(3) 上記(2)で求めた$\Delta_r G^\circ$の値を用いて, 反応①の 298K における平衡定数の自然対数 $\ln K$ の値を求めよ。ここで, 気体定数は R=8.3 JK^{-1}mol^{-1} とする。

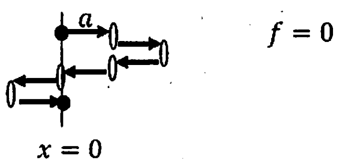
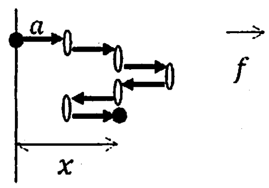
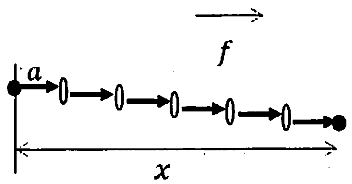
(4) 上記(3)で求めた平衡定数は方解石の水への溶解度積 K_{sp} に等しい。温度が 298K よりも高くなったとき, この K_{sp} の値は大きくなるか小さくなるか？　上記(1)で求めた反応①の標準反応エンタルピー($\Delta_r H^\circ$)の符号をもとに説明せよ。

問題３　(熱力学／統計力学)

ゴムに力 f を加えると容易に伸びる（変形する）が、力を除くとゴムは元の形に戻る。この変形挙動を、ゴムを構成する分子の配置のエントロピー S をもとに考察する。

ゴムの変形を表す簡単なモデルとして、図 1 に示す通り、鎖状につながった n 個の分子、即ち一次元の分子鎖の変形を考える。太い矢印で表した n 個の分子は、それぞれが紙面水平方向の右向き(→)、左向き(←)のいずれかを向くことができ、隣合う分子をつなぐ関節において分子鎖は自由に（抵抗を受けずに）折れ曲がることができる。個々の分子の長さ a は力 f に関わらず一定で、分子間の相互作用は無視できるものとする。

いま、力 f のもとで観測される分子鎖の変形量 x を、図 1 に示す通り、紙面水平方向に対して測った分子鎖の両端の間隔（記号●で示す分子鎖の先端と末端の間隔）で表すものとする。変形のない（力を加えていない）状態 0 では、右向きの分子数 n_R と左向きの分子数 n_L は等しい。変形した（力を加えた）状態 1 と状態 2 では $n_R > n_L$ となる。このモデルについて、以下の問い(1)～(7) に答えよ。

	右向きの分子数 n_R と 左向きの分子数 n_L	分子の置かれ方と 分子鎖の変形量 x の関係
状態 0 変形のない状態	$n_R = n_L = \dfrac{n}{2}$	
状態 1 変形した状態	$n_R > n_L$	
状態 2 最も大きく変形した状態	$n_R = n$ $n_L = 0$	

→ 右向きの分子　　← 左向きの分子

a 分子の長さ　　() 隣合う分子の関節　　● 分子鎖の両端（先端と末端）　　→ 力 f の向き

図 1. ゴムの変形を表す簡単なモデル。

(1) 変形量 x を n_R、n_L、a を用いて表せ。紙面水平方向における関節の大きさは無視できるものとする。

(2) (1)の解答をもとに、n_R と n_L を、それぞれ n、x、a を用いて表せ。

(3) 分子鎖が n_R 個の右向きの分子と、n_L 個の左向きの分子によって構成されるものとする。これら n_R 個の右向きの分子と n_L 個の左向きの分子の置かれ方に対する場合の数 W（分子の配列に関わる配置数 W）を n、n_R、n_L を用いて表せ。

(4) (3)で求めた配置数 W をもとに、分子の配置のエントロピー S を①式のように書き表すことができる。空欄「ア」の部分を n、x、a を用いて表せ。なお①式の導出にあたっては、n、n_R、n_L がいずれも十分に大きな数であると仮定し、スターリングの公式 $N! \cong N\ln N - N$（$N \gg 1$）を利用している。k_B はボルツマン定数である。

$$S = nk_B\left\{\ln 2 - \frac{1}{2}\left(1+\boxed{ア}\right)\ln\left(1+\boxed{ア}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\boxed{ア}\right)\ln\left(1-\boxed{ア}\right)\right\} \qquad ①$$

(5) 分子鎖の内部エネルギーを E、温度を T として、ヘルムホルツの自由エネルギー F を E、T、n、a、x 、k_B を用いて表せ。

(6) 図 1 において、分子鎖が最も大きく変形した状態 2 と、変形のない状態 0 を比較する。分子の配置のエントロピー S と (3)で求めた配置数 W の関係から、状態 2 におけるヘルムホルツの自由エネルギー F_2 は、$F_2 = E$ と記述できるものとする。変形のない状態 0 におけるヘルムホルツの自由エネルギー F_0 を E、T、n、k_B で書き表したうえで、F_2 との大小関係を比較し、力を除くと状態 0 に戻る理由を説明せよ。なお、内部エネルギー E は x に関わらず一定とする。

(7) 温度 T において、分子鎖の長さを x に保つために必要な力の大きさ f_m は、(5)で求めたヘルムホルツの自由エネルギーをもとに、②式のように記述することができる。空欄「イ」の部分を n、x、a を用いて表せ。(6)の条件と同じく、内部エネルギー E は x に関わらず一定とする。

$$f_m = \frac{k_B T}{2a}\ln\frac{\left(1+\boxed{イ}\right)}{\left(1-\boxed{イ}\right)} \qquad ②$$

問題４（電磁気学）

以下の式(a)〜(d)はマクスウェル方程式である。式中の記号は一般的なものであり、$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、ρは電荷密度、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、$\boldsymbol{r}$ は位置、t は時間、ε_0は真空の誘電率、μ_0は真空の透磁率である。下の問いに答えよ。

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(a)}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{(c)}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad \text{(d)}$$

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{V}$ を書け。

(2) 公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ において x 成分が次式となることを示せ。

$$(\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}))_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_x$$

(3) 真空の条件$(\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0)$の下で $\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0$ を導け。

(4) 上の問(3)の式はどのような現象を表すか。式の名称で答えても良い。

(5) 式(a)から積分形のガウスの法則を導け。ただし全電荷を Q とせよ。

(6) 真空中に無限に長くて十分細い直線状の一様電荷がある。その線密度を λ として以下の問いに答えよ。

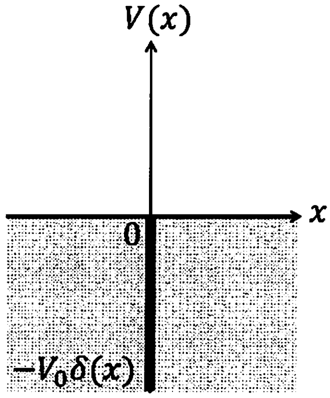
① この直線から距離 d の位置に生じる電場の強さ $E(d)$ を求めよ。ただし積分の際には、半径 d 高さ h の円筒形のガウス閉曲面を用いよ。

② 距離 d の位置の電位$\phi(d)$を求めよ。ただし$\phi(a) = 0, a > d$とする。

(7) 式(a)は電荷と電気力線との関係を表す。一方、式(d)から磁荷または磁力線について分かることは何か。

問題5（量子力学）

［1］1次元のデルタ関数型ポテンシャル$V(x)=-V_0\delta(x)$に質量m、エネルギー$E\ (<0)$の粒子1個が束縛されている場合を考える。$V_0>0$とする。この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式の解を$u(x)$とする。以下の問いに答えよ。計算過程も記すこと。なお、時間を含まないシュレディンガー方程式を微小な領域$-\varepsilon$から$+\varepsilon$で積分し$\varepsilon\to 0$とすることで次式が成り立つことを使用してよい。



$$\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=+\varepsilon}-\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon}=-\frac{2mV_0}{\hbar^2}u(0)$$

(1) $x<0$の領域と$x>0$の領域のそれぞれで、時間を含まないシュレディンガー方程式を解いて一般解を求めよ。

(2) $x=0$での境界条件をすべて記せ。

(3) エネルギー固有値を求めよ。

(4) 規格化された固有関数を求めよ。また、固有関数の概形を描け。

［2］一次元のポテンシャル$V(x)$中の質量mの粒子について考える。以下の問いに答えよ。

(1) 波動関数を$\psi(x,t)$として、時間に依存するシュレディンガー方程式を記せ。

(2) 運動量の期待値$\langle p\rangle$と力の期待値$\langle -\partial V/\partial x\rangle$の間に以下の関係が成り立つことを示せ。ただし$\psi(x,t)$は無限遠方でゼロになるとする。また$V(x)$は実関数とする。

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle=\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle$$

問題6（輸送現象論）

［1］二次元x-y直交座標系における運動量，物質モル濃度の収支式と輸送束を考える．時間t，x方向速度u，y方向速度v，圧力p，密度ρ，モル濃度C_A，動粘性係数ν，物質拡散係数D_{AB}，y面に作用するx方向のせん断応力τ_{yx}，x方向のモル輸送束$n_{A,x}$と定義する．また，ρ，ν，D_{AB}は一定とする．

(1) 各物理量の収支式と輸送束は，次の表1にまとめられる．定義された記号・変数以外は用いないで、空欄①～③を埋め，表を完成させよ．

表1　運動量，物質モル濃度の収支式と輸送束

物理量	収支式	輸送束
x方向運動量	$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$	$\frac{\tau_{yx}}{\rho}=-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$
物質モル濃度	$\frac{\partial C_A}{\partial t}+$ ① $=$ ②	$n_{A,x}=$ ③

(2) 無次元変数 $\tilde{x}=x/L$，$\tilde{y}=y/L$，$\tilde{t}=tU/L$，$\tilde{u}=u/U$，$\tilde{v}=v/U$，$\tilde{p}=p/\rho U^2$，$\widetilde{C_A}=C_A/\Delta C_A$を用いて，表1に示した収支式を無次元化し，表2のように整理した．ここで，Lは代表長さ，Uは代表速度，ΔC_Aは代表濃度である。上記の無次元変数及びL，UとD_{AB}を用いて空欄④，⑤に入る項を表せ．

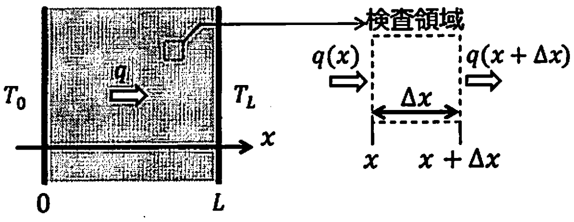
表2　運動量，物質モル濃度の無次元収支式

物理量	無次元収支式
x方向運動量	$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\nu}{LU}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}\right)$
物質モル濃度	$\frac{\partial\widetilde{C_A}}{\partial\tilde{t}}+$ ④ $=$ ⑤

(3) 運動量，物質モル濃度の無次元収支式における分子拡散項にかかる係数が，それぞれ$1/Re$，$1/(Re\,Sc)$となることを用いて，レイノルズ数Reとシュミット数Scの定義を空欄⑥，⑦に示せ．また，それぞれの物理的な意味について簡単に説明せよ．

$Re=$ ⑥　　　　$Sc=$ ⑦

[2] 固体壁におけるx方向一次元の熱伝導を考える．温度をT，定圧比熱をC_p，密度をρ，熱伝導率をk_Tとする場合，次の問いに答えよ．ただし，物性値は一定とする．



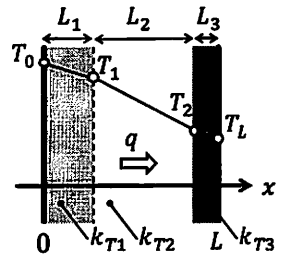


図 (a) 一次元熱伝導の模式図　　(b) 多重層の熱伝導の模式図

(1) 位置xにおける熱輸送束$q(x)$を，フーリエの熱伝導法則により，T，k_Tを用いて表せ．

(2) 図(a)に示すように，時間Δtの間に，xと$x+\Delta x$で囲まれた検査領域の温度変化をΔTとする．このとき，xにおける熱収支が式(1)で表現されることを示せ．ただし，$\Delta t \to 0$ において，$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t}$ となることを用いてよい．

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

(3) 図(a)に示すように，$x=0$で$T=T_0$，$x=L$で$T=T_L$の時，定常状態における温度分布$T(x)$と熱輸送束分布$q(x)$を求めよ．また，$T_0 > T_L$ として，$T(x)$と$q(x)$の分布をグラフに図示せよ．分布は概形でよいが，位置とその点における値を明記せよ．

(4) 図(b)の多重層の壁において，定常状態における$x=0$から$x=L$の熱輸送束qは式(2)のように書ける．

$$q = \frac{k_{T,m}}{L}(T_0 - T_L) \qquad (2)$$

このとき，平均熱伝導率$k_{T,m}$と多重層の厚さLの比 $k_{T,m}/L$を，各層の厚さL_1，L_2，L_3と熱伝導率k_{T1}，k_{T2}，k_{T3}を用いて表せ．

問題７（固体物理学）

［１］金属中の自由電子に関する以下の文章を読み，問いに答えよ．

金属中の自由電子(質量 m)が一辺Lの立方体(原子数 N)中を，周期境界条件を満足しながら波動関数，

$$\phi(x,y,z) = A\exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}\ ,\ A\text{は定数},$$

に従って運動している．ここで，$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$は（ ① ）と呼ばれる物理量であり，波長$\lambda$および波の進行方向の基底ベクトル$\boldsymbol{i}$を用いると，$\boldsymbol{k}=$（ ② ）と表せる．また$|\boldsymbol{k}|$は，$L$および整数$n$を用いて，$|\boldsymbol{k}| =$（ ③ ）と表され、離散的な値を取ることが示される．一方，自由電子のエネルギーεは，Lおよびnを用いて $\varepsilon =$ （ ④ ）と表せる．(a)自由電子の量子状態はk_x, k_yおよびk_zを基軸とする$\boldsymbol{k}$空間中に表すことができる．$\boldsymbol{k}$空間中で１つの自由電子の量子状態が占有する体積は（ ⑤ ）である．

$\boldsymbol{k}$空間中で最も$|\boldsymbol{k}|$の大きい自由電子のエネルギーは（ ⑥ ）と呼ばれる．このエネルギーをε_1と表すことにする．ε_1を温度に換算すると，$T_1 =$ （ ⑦ ）となる．今，自由電子の量子状態の分布が$\boldsymbol{k}$空間中で等方的であるとすると、状態密度関数 $g(\varepsilon)$は，ε_1を用いて$g(\varepsilon) =$（ ⑧ ）と表すことができる．$T = 0$ (K)の時の自由電子の平均エネルギーは，ε_1を用いて，$\varepsilon =$ （ ⑨ ）となる．自由電子の粒子数密度を$n(\varepsilon)$とすると，$n(\varepsilon)$は$g(\varepsilon)$およびフェルミーディラック分布関数を用いて，(b) $n(\varepsilon) =$（ ⑩ ）と表される．

(1) 文章中の（ ① ）～（ ⑩ ）に入る適切な語句または数式を答えよ．（ ⑧ ）および（ ⑨ ）については，解答に至る過程を記すこと．

(2) 下線(a)について，自由電子の量子状態 (k_x, k_y, k_z)を最小のエネルギー状態から５番目に小さいエネルギーの状態までを，$k_x \geq 0, k_y \geq 0,$および$k_z \geq 0$ の$\boldsymbol{k}$空間中に図示せよ．

(3) 下線(b)について，$T = T_1$ (K)の場合の$n(\varepsilon)$をεの関係として図示せよ．ただし，$T_1 > 0$(K)である．また図中に熱的に励起された自由電子の密度分布を示せ．

［２］結晶構造および格子欠陥に関する以下の文章を読み，問いに答えよ．

空間格子とは，結晶中の格子点が作る周期的に配列した三次元格子のことであり，その対称性から 14 種類に分類される．これは（ ① ）格子と呼ばれるものであり，（ ① ）格子は（ ② ）格子，（ ③ ）格子，斜方格子，六方格子，単斜格子，三方格子，および三斜格子の７つの結晶系に分類される．（ ② ）格子には，（ ④ ）格子，（ ⑤ ）格子および（ ⑥ ）格子が存在する．

（ ④ ）格子は最密構造であり，純金属では例えば（ ⑦ ）がこの空間格子に属する．この格子の最密面は（ ⑧ ）面であり，最近接原子の方向は（ ⑨ ）方向である．一方，結晶中には必ず規則性が乱れた領域があり，これを格子欠陥という．０次元の格子欠陥は点欠陥と呼ばれ，格子原子が本来あるべき位置に存在しない場合，これを（ ⑩ ）といい，原子位置ではない原子間に存在する原子を格子間原子という．(a)熱平衡状態で主要に存在する点欠陥は（ ⑩ ）である．

ダイヤモンド，Si，Ge の結晶構造は(b)ダイヤモンド構造である．この構造は、（ ① ）格子のなかでは（ ⑪ ）格子に属し、単位格子中には（ ⑫ ）個の原子が含まれる．

(1) （ ① ）～（ ⑫ ）に入る適切な語句または数式を答えよ．

(2) 下線(a)について，(1)で解答した（ ⑩ ）の熱平衡状態における濃度と温度の関係式を記し，その概略図をグラフに示せ．関係式に用いた物理量の定義を記すこと．

(3) 下線(b)について，最も大きな剛体球を充填した時に原子が占有する体積割合（充填率）を求めよ．有効数字は２桁とすること．

(4) 下線(b)について，格子定数を a とする時の<111>方向の原子の並びを説明せよ．

問題８（原子物理学）

［１］ 慣性系Ｓと、Ｓに対して x 方向に速度 v で等速運動している慣性系 S'を考える。ここで、v は光速 c に対して無視できない大きさとする。なお、$c>v$ である。慣性系Ｓでの位置及び時間座標を（x,y,z,t）、慣性系 S'での位置及び時間座標を（x',y',z',t'）とする。以下の問いに答えよ。

(1) 慣性系 S'での位置座標及び時間座標（x',y',z',t'）を慣性系 S で測定した位置及び時間座標（x,y,z,t）を用いて、導出過程を示し求めよ。

(2) 慣性系 S'である物体が動いているときの x'方向、y'方向及び z'方向の速度（u_x',u_y',u_z'）は、慣性系Ｓでの物体の x 方向、y 方向及び z 方向の速度（u_x,u_y,u_z）を用いると以下のように表されることを示せ。

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\left(v/c^2\right)u_x} \qquad u'_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,u_y}{1-\left(v/c^2\right)u_x} \qquad u'_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,u_z}{1-\left(v/c^2\right)u_x}$$

(3) 慣性系 S'で x' 方向に速度 u_x' で移動する物体の速度を慣性系 S で測定した速度 u_x は以下のように表される。

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\left(v/c^2\right)u'_x}$$

この式において、u_x は $c>v$ かつ $c>u_x'$ である限り c を超えないことを証明せよ。

［２］水素原子において、陽子を中心に半径 r で電子が等速円運動していると仮定する。陽子の電荷を e、電子の電荷を $-e$、電子の質量を m_e、陽子からの距離を r、電子の速度を v、真空の誘電率を ϵ_0、プランク定数を h とする。以下の問に答えよ。

(1) 電子でのクーロン力と遠心力のつり合いの式を示せ。ここで、角速度 ω を用いない場合と用いる場合の双方を示すこと。

(2) 陽子の電荷による電子のポテンシャルエネルギー $U(\mathrm{r})$ を ϵ_0、e、r を使って表せ。

(3) 電子のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和を E とする。E を ϵ_0、e、r、m_e、h のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 電子は半径 r で陽子の周りを等速円運動しており、その角運動量を L とする。この時の円運動の半径 r を ϵ_0、e、m_e、h のうち必要なものと L を用いて表せ。なお、以下の関係を参考にせよ。

$$L = m_e v r = m_e r^2 \omega, \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

(5) 角運動量 L が下記の式で表されるとした時の、水素原子で円運動する電子の定常状態のエネルギーE_nをϵ_0 、e 、m_e 、h、n のうち必要なものを用いて表せ。

$$L = \frac{h}{2\pi}n \,, n = 1,2,3,\cdots$$

(6) 水素原子で円運動する電子の定常状態のエネルギーが(5)で得られた式で表されるとする。このとき n が２から１へ変化するとどのようなことが起きるのか説明せよ。

問　題　訂　正

問題６（輸送現象論）　　［１］（2）

誤

表２　運動量，物質モル濃度の無次元収支式

物理量	無次元収支式
x方向運動量	$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad = \quad -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{LU}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right)$

正

表２　運動量，物質モル濃度の無次元収支式

物理量	無次元収支式
x方向運動量	$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad = \quad -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{LU}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right)$