令和5年8月21日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和6年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００〜１０：３０

1.　問題1は必須問題とする。問題2と問題3は選択問題でありどちらか1題を選択すること。合計2題を解答すること。

（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

2.　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
　　1枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

3.　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（必須）

[１]（１）ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(0,-1,0)$, $\boldsymbol{c}=(0,1,1)$ を列ベクトルとする

行列 $\boldsymbol{D}$ に対して、固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（２）ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の始点を原点 O とし、それぞれの終点の座標を A, B, C とする。

三角形 OAB の面積を求めよ。

（３）点 O, A, B を通る平面の方程式、及びその平面の法線ベクトルを求めよ。

（４）点 O, A, B, C が張る４面体の体積を求めよ。

[２] 下記の積分を実行せよ。

（１） $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

（２） $\displaystyle\iint_R (2a-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （R は $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $x+z=2a$ で囲まれた領域、$a>0$ とする。）

[３] 下記の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=e^x+1$

（２） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy-2y^2}{x^2}$

問題２（選択）

［１］以下の関数

$$\frac{z}{z^2+1}\ (z \in \mathbb{C})$$

を円 $|z| = 2$ 上を正の向きに１周する路Cで積分せよ。

［２］$\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$と$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$ $(x \in \mathbb{R})$を以下に従って求めよ。

（１）$f(z) = e^{-z^2}(z \in \mathbb{C})$を図１の扇形の路$C(\overline{\mathrm{OA}}, \widehat{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BO}})$で積分した値を求めよ。ただし点Aと点Bは円弧の端点、rは点Aのx座標、路C_rとは円弧$\widehat{\mathrm{AB}}$のことである。

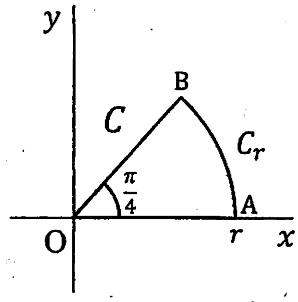

図１

（２）$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} e^{-z^2}\mathrm{d}z$はどうなるか説明せよ。

（３）$f(\mathrm{z})$は実軸上でe^{-x^2}なので、その積分はよく知られた

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

である。これを用い$\overline{\mathrm{BO}}$での積分でzを極形式$re^{i\theta}$に変換して計算を行って、実部と虚部を比較することによって$\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$を求めよ。

問題３　（選択）

［１］ 周期 T の関数 $f(t) = \left|\sin\frac{\pi}{T}t\right|$

を図示し、複素フーリエ級数を求めよ。

［２］関数 $u(t)$ のラプラス変換を以下の様に定義する。

$$F(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

以下の関数を図示し、ラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

（１） $u(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (0 \le t) \end{cases}$

（２） $u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t<a) \\ 1 & (a \le t) \end{cases}$

（３） $u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \le t < a) \\ 0 & (a \le t) \end{cases}$