令和４年８月２２日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和５年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅠ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

1. 以下の８題を解答せよ。
　（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
　（配点：各題２５点、合計２００点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題1 （力学）

[1] 質量M, 長さLの一様でまっすぐな細い棒がある。図1に示すように、棒の中心を通る軸Oまわりに棒を回転させたときの慣性モーメントを求めよ。

[2] [1]の棒の上端Pを、水平な固定軸のまわりを自由に回転できるように取り付け、棒を静止させた(図2左)。この棒に速度Vで水平に飛んできた質量mの物体が、Pから距離xのところに衝突後付着し、その後棒と一緒になって固定軸Pを支点として振動した(図2右)。重力加速度はgとして以下の問いに答えよ。ただし固定軸まわりの摩擦は無視して良い。

(1) 棒が回り始める際の角速度ωを求めよ。

(2) 衝突の前後における運動エネルギーの変化ΔEを求めよ。

(3) 衝突の前後で運動量が保存する場合がある。そのときのxを求めよ。また、運動量が保存する理由についても説明せよ。

(4) 棒の振動が微小振動として、その周期Tを求めよ。

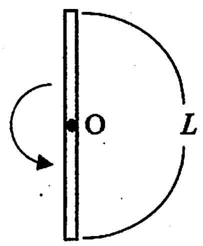


図1

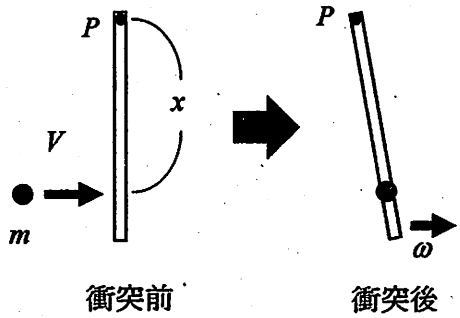


図2

問題２（物理化学）

以下の問いに答えよ。

(1) 二酸化炭素の状態図（縦軸を圧力、横軸を温度とせよ）を描き、特徴的な点と領域の名称およびそれぞれの場所の可変度（自由度）を示せ。また１気圧に相当する場所を横線（点線または破線）で示せ。

(2) 純物質の化学ポテンシャルμの温度依存性を表す式を導け。また、(1)の二酸化炭素について１気圧における各相の化学ポテンシャル（縦軸）を温度（横軸）に対しまとめて図示せよ。

(3) 二酸化炭素をメタンと反応させて水素を作る反応（改質反応）を①式に示す。
この反応のエンタルピー変化、ギブズエネルギー変化、エントロピー変化を表に示すデータを用いて求めよ。また、この反応は発熱反応か吸熱反応かを答えよ。

$CH_4 + CO_2 \rightarrow 2CO + 2H_2$ …………①

	CH_4(g)	CO_2(g)	CO(g)	H_2(g)
標準生成エンタルピー　$\Delta_f H^\circ$ / kJ mol^{-1}	−75	−390	−110	0
標準生成ギブズエネルギー　$\Delta_f G^\circ$ / kJ mol^{-1}	−51	−390	−140	0
標準エントロピーS_m° / J K^{-1} mol^{-1}	190	220	200	130

(4) 容器が容積の等しい２室に仕切られ、一方の室には 3.0 mol の理想気体A、他方の室には 1.0 mol の理想気体Bが入っている。仕切りを静かに除いたときのエントロピー変化を求めよ。温度はTで一定とし、気体定数Rと自然対数 ln を用いて解答すること。

問題３　（熱力学／統計力学）

エネルギーが $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$ と与えられる粒子（振動子）について、以下の問いに答えよ。n は量子数($n = 0, 1, 2, \cdots$)、h はプランク定数、ν は振動数とする。なお解答に際してボルツマン定数は k_B と表すこと。

（１）温度 T において、ある粒子のエネルギーが ε_1（量子数 $n = 1$）となる確率は、エネルギーが ε_0（量子数 $n = 0$）となる確率の $\boxed{ア}$ 倍になる。空欄「ア」の部分を正しく記入せよ。

（２）以後、N 個の粒子からなる体系を考える。粒子間の相互作用は無視できるものとする。温度に関わらず、この体系のエネルギー E は、整数 M を用いて $E = \frac{N}{2}h\nu + Mh\nu$ と与えられる。この M を i 番目の粒子が示す量子数 n_i を用いて書き表せ。

（３）(2)で求めた M に対して、n_i の選び方の総数（N 個の粒子が示す量子数に関わる組合わせの総数）を配置数 W とする。以下の「考えかた」を参考に、W を M と N を用いて表せ。

【考えかた】 W の導出は、M 個の白玉を N 個の小部屋に分配する事例に置き換えて考えることができる。ただし、個々の小部屋に収容される白玉の数は未定である（i 番目の粒子の量子数 n_i は、様々な値を取り得ることに対応）。従ってこの場合は、M 個の白玉と、小部屋の仕切りの数に相当する $N-1$ 個の黒玉をあわせた、合計 $M+N-1$ 個の玉の並べ方を考えればよい。

M 個の白玉
○○○○○○○○○○○○○○○○
$N-1$ 個の黒玉
●●●●
$M+N-1$ 個の白玉と黒玉
○○○●○○○○○○●○●○○○○●○○

（４）(3)で求めた配置数 W をもとに、エントロピー S を M、N、k_B を用いて表せ。$M \gg 1$、$N \gg 1$ としてスターリングの公式 $\ln x! = x\ln x - x$ を用いること。なお S の導出においては、$N \gg 1$ の条件を考慮して、$N-1$ を N と近似すること。

（５）統計力学的な温度 T を $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$ と定義する。この定義と(4)で求めた S をもとに、体系のエネルギー E を温度 T の関数として表すと次式のようになる。空欄「イ」の部分を正しく記入せよ。

$$E = Nh\nu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\boxed{イ}}\right)$$

問題4（電磁気学）

[1] 半径 a の球の内部に体積密度 ρ の電荷が一様に分布している。球の中心からの距離を r 誘電率を ε として以下の問いに答えよ。

(1) 球外部での電場の強さ E を求めよ。

(2) 球内部での電場の強さ E を求めよ。

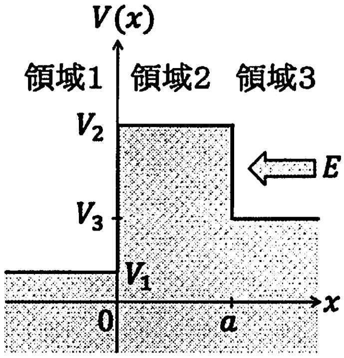
(3) 球の内側に電荷 q の微小粒子を置く。微小粒子に働く力の大きさ F を求めよ。

[2] 無限に長くて十分細い直線状導線 L_1 と L_2 がある。透磁率を μ として以下の問いに答えよ。

(1) L_1 に電流 I を流す。L_1 から距離 r の位置での磁束密度の大きさ B を求めよ。

(2) L_1 と L_2 を距離 d だけ離して平行に置き、それぞれに電流 I を同じ向きに流す。このとき、導線間に働く単位長さ当たりの力の大きさ F を求めよ。

問題5（量子力学）



図のような一次元のポテンシャル障壁$V(x)$に、質量mの粒子が一定のエネルギーEで正の無限遠方から定常的に入射する場合を考える。$V_3 < E < V_2$とする。この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式の解は、k_1, κ_2, k_3を正の実数として次のように表される。A, B, C, D, F, Gは未定係数である。以下の問いに答えよ。

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & (\text{領域 } 1 : x < 0) \\ u_2(x) = Ce^{\kappa_2 x} + De^{-\kappa_2 x} & (\text{領域 } 2 : 0 \le x \le a) \\ u_3(x) = Fe^{ik_3x} + Ge^{-ik_3x} & (\text{領域 } 3 : a < x) \end{cases}$$

(1) k_1, κ_2, k_3をそれぞれ $E, V_1, V_2, V_3, m, \hbar, a$ のうち必要なものを使って表せ。またk_1とk_3の大小関係を記せ。

(2) $x = 0$と$x = a$での境界条件をすべて記せ。

(3) 確率密度$P(x,t)$と確率流密度$S(x,t)$との間に以下の確率保存則が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0$$

ただし$P(x,t)$と$S(x,t)$は時間に依存するシュレディンガー方程式の解を$\psi(x,t)$として

$$P(x,t) \equiv |\psi(x,t)|^2$$

$$S(x,t) \equiv -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right] \qquad \cdots①$$

と定義される。

(4) ①式は定常状態では以下のように書けることを示せ。

$$S(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x)\right]$$

(5) 定常状態における領域1と領域3の確率流密度S_1とS_3を計算せよ。またS_1とS_3の間に成立する関係を理由とともに述べよ。

(6) このポテンシャル障壁による反射率Rと透過率Tの間に以下の関係が成り立つことを(5)の結果を利用して示せ。

$$R + T = 1$$

問題6 （輸送現象論）

［1］ 流路壁面から壁面に沿って流れる流体への物質移動を考える。このとき、壁面から流体へ移動する成分Aの物質移動係数k_A [m/s]がこれと独立な因子（物理量）である流体B中の成分 A の拡散係数D_{AB} [m²/s]、流体の動粘性係数ν [m²/s]、流速u [m/s]及び流路の代表長さl [m]に関係すると仮定する。すなわち、k_Aは、D_{AB}、ν、u及びlの関数として

$$k_A = \mathrm{K}(D_{AB})^{a_1}(\nu)^{a_2}(u)^{a_3}(l)^{a_4}$$

で表されるものとする。但し、Kは無次元の係数、a_1～a_4は未知の指数である。このとき、以下の問いに答えよ。

（1） 上式を用いた次元解析から無次元量$\frac{k_A l}{D_{AB}}$が２つの無次元量$\frac{\nu}{D_{AB}}$及び$\frac{ul}{\nu}$の関数として表されることを導け。

（2） 次元解析において問題に関係する物理量の個数、無次元量の個数及び基本次元の個数との間には、一般に、どのような関係式が成り立つか述べよ。

（3） 本次元解析に現れる３つの無次元量の一般名称及びそれらの物理的な意味について簡単に説明せよ。

［2］ 溶融することなく一定の大きさで一様に発熱している半径Rの無限に長い固体円柱を考える。固体円柱の表面は周方向に一定の温度に保たれ、固体柱の軸方向（z方向）の温度勾配は０であるものとするとき、以下の問いに答えよ。

（1） 円柱座標(r,θ,z)での熱伝導方程式が次式で与えられるとき、これを簡単化して定常状態での固体円柱に対する熱伝導方程式を示せ。

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + q'''$$

ここで、c_p、k及びρは、それぞれ、比熱容量、熱伝導率及び密度、q'''は単位時間、単位体積当たりの発熱量、tは時間、Tは温度である。

（2） 固体円柱の表面温度をT_wとするとき、（１）で簡単化した熱伝導方程式を解いて固体柱内部の径方向温度分布を与える式を求めよ。

（3） 固体柱の単位時間、単位長さ当たりの発熱量q'を用いて固体柱の中心温度を表す式を示せ。

（4） 固体柱の中心温度を固体柱の融点T_m以下に保つためのq'の上限値を求めよ。

問題７（固体物理学）

固体の熱的性質に関する以下の問いに答えよ。

(1) デューロン・プティの法則から導かれる固体の体積モル比熱を示せ。またその比熱を導く考え方を説明せよ。

(2) デバイモデルによる体積モル比熱の求め方を説明せよ。説明には内部エネルギーの求め方を含むこと。説明に式を用いる場合、これを導出する必要はないが、物理量は定義して使用すること。

(3) デューロン・プティの法則、デバイモデルから導かれる体積モル比熱の温度依存性の概略図を示せ。

(4) 絶縁体の熱伝導はフォノンの運動によって生じる。熱伝導度κをフォノンのドリフト速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$、衝突の平均自由行路$l_{\mathrm{p}}$、フォノンの単位体積当たりの格子比熱$c_{v\mathrm{p}}$の中から必要なものを用いて式に表せ。

(5) 絶縁体の熱伝導度の温度依存性について説明せよ。またそのような温度依存性を示す理由を(4)で解答した式に含まれる物理量の温度依存性から定性的に説明せよ。

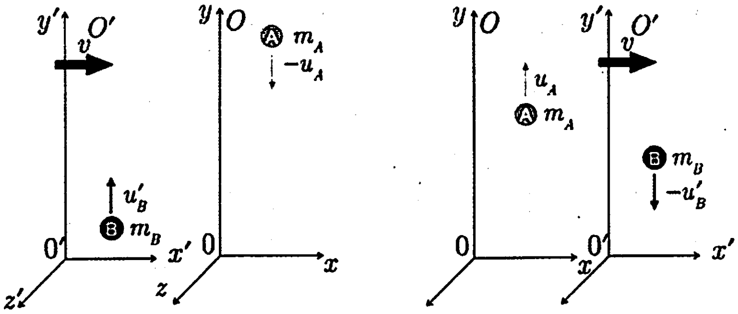
(6) 固体結晶が熱膨張する理由を説明せよ。

問題８（原子物理学）

［１］

O系に質量m_Aの粒子Ａが$\pm y$方向に運動し、O'系に質量m_Bの粒子Ｂが$\pm y'$方向に運動する場合を考える。いずれの粒子もx及びx'方向の運動はないとする。O系とO'系がいずれも静止しているとき、$m_A = m_B$である。なお、光速をcとする。

O'系がO系のx方向に光速に近い速度vで等速運動しているとする。（下図参照）O系において粒子Ａは$-y$方向に速度$-u_A$で移動し、O'系において粒子Ｂは$+y'$方向に速度u'_Bで移動しているとする。なお、粒子ＢのO'系での衝突前のx'およびz'方向の速度はゼロである。ここで、粒子Ａと粒子Ｂの速さは同じである。$(u_A = u'_B)$



(1)　粒子Ａが粒子Ｂと弾性衝突し、$-u_A$がu_Aに、u'_Bが$-u'_B$になった。なお、O系での粒子Ａの衝突前後のx方向及びz方向の速度はゼロであった。この時のO系で観察した衝突前後のy方向の運動量の関係を示せ。

(2)　O系で観測した粒子Ｂの速さu_Bをu'_B、v、cを用いて表せ。なお、必要であれば以下の関係を用いよ。

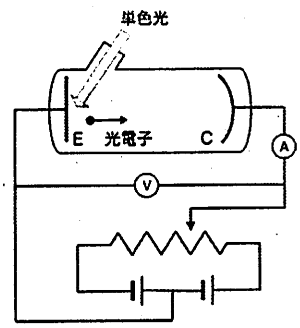
$$u_y = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}u'_y}{1+(v^2/c^2)u'_x}$$

(3)　衝突が弾性衝突であることを考慮し、O系で観測される粒子Ｂの質量を求めよ。

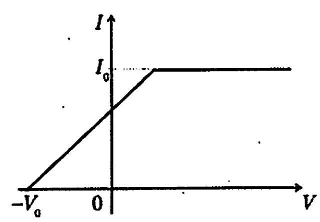
［２］

右図(a)のような装置において、光電管の電極Ｅには光電効果が発生しやすい金属を薄く塗布している。振動数νの単色光を一定の強さで電極Ｅに照射し、電極Ｅに対する電極Ｃの電位Vと電流計を流れる電流Iの関係を調べると、右図(b)に示すように、電位が$-V_0$の時に電流がゼロとなり、電位を増やすと電流が増加しI_0となったのち一定となった。以下の問いに答えよ。

(a)



(b)



(1)　電極Ｅから飛び出す電子の運動エネルギーの最大値K_mはどのように表されるか。なお、電子の電荷の大きさをeとせよ。

(2)　電極Ｅの物質を固定して、単色光の振動数νとK_mの関係を調べたところ、ν=4.4×10^{14}Hzで電子が発生しはじめ、ν=9×10^{14}HzのときK_m=2eV、ν=12×10^{14}HzのときK_m=3.25eVであった。これらの値からプランク定数hの値を求めよ。なお、単位は[eV·s]とせよ。

(3)　電極Ｅの仕事関数をeVの単位で求めよ。

令和４年８月２２日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和５年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅡ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

1. 以下の４題を解答せよ。
   （力学、電磁気学、電気・電子回路、小作文）
   （配点：各題５０点、合計２００点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ（裏面も使用可）。ただし、小作文は升目の用紙に記入すること（裏面は使用不可）。

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（力学）

[１] 質量M, 長さLの一様でまっすぐな細い棒がある。この棒の上端Pを、水平な固定軸のまわりを自由に回転できるように取り付け、棒を静止させた(図１左)。この棒に速度Vで水平に飛んできた質量mの物体が、Pから距離xのところに衝突後付着し、その後棒と一緒になって固定軸Pを支点として振動した(図１右)。重力加速度はgとして以下の問いに答えよ。ただし固定軸まわりの摩擦は無視して良い。

(1) 物体が付着する前の、この棒の固定軸Pのまわりの慣性モーメントを求めよ。

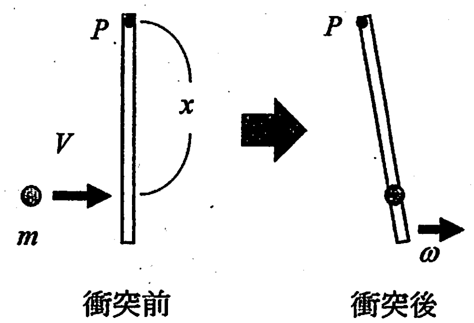
(2) 質量mの物体が付着後、棒が回り始める際の角速度ωを求めよ。

(3) 衝突の前後における運動エネルギーの変化ΔEを求めよ。

(4) 衝突の前後で運動量が保存する場合がある。そのときのxを求めよ。また、運動量が保存する理由についても説明せよ。

(5) 棒の振動が微小振動として、その周期Tを求めよ。

図１



[２] 質量の無視できるばね定数kのばねに質点をつないだ際の運動を調べる。以下の問いに答えよ。

(1) 図２のようにこのばねに質量m_1の質点をつなぎ、もう一端は壁に固定して摩擦の無視できる台上に置く。この質点をつりあいの位置からLだけ伸ばし、時刻$t = 0$で静かに手を離す。時刻tにおける質点の変位をxとして運動方程式を記述し、それを解いて質点位置の時間変化を示せ。

(2) 次に図３のように上のばねのもう一方の端に質量m_2の質点をつなぎ摩擦の無視できる台上に置く。このばねをつりあいの位置からLだけ伸ばす。このときの質量m_1、m_2それぞれの質点位置をX_1、X_2とする。その後、時刻$t=0$で静かに手を離す。

(i) 手を離した後のそれぞれの質点のつりあい位置からの変位をx_1, x_2として運動方程式を示せ。

(ii) 手を離す前の２つの質点の質量中心の位置をm_1、m_2、X_1、X_2を用いて表わせ。さらに手を離した後の質量中心の速度を示せ。

(iii) 手を離した後の２つの質点の変位x_1, x_2の時間変化を説明せよ。

図２

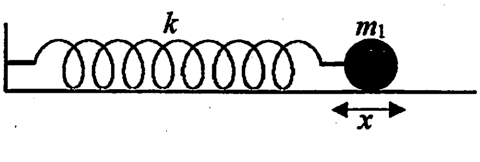
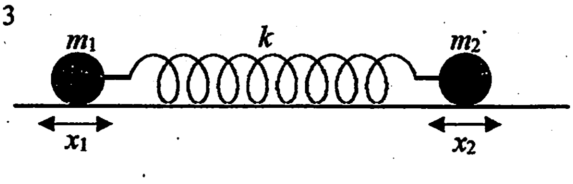


図３



問題４（電磁気学）

[1] 半径 a の球の内部に体積密度 ρ の電荷が一様に分布している。球の中心からの距離を r 誘電率を ε として以下の問いに答えよ。

(1) 球外部での電場の強さ E を求めよ。

(2) 球内部での電場の強さ E を求めよ。

(3) 球の内側に電荷 q の微小粒子を置く。微小粒子に働く力の大きさ F を求めよ。

[2] 無限に長くて十分細い直線状導線 L_1 と L_2 がある。透磁率を μ として以下の問いに答えよ。

(1) L_1 に電流 I を流す。L_1 から距離 r の位置での磁束密度の大きさ B を求めよ。

(2) L_1 と L_2 を距離 d だけ離して平行に置き、それぞれに電流 I を同じ向きに流す。このとき、導線間に働く単位長さ当たりの力の大きさ F を求めよ。

[3] 極板面積 S、極板間距離 d の平行平板コンデンサがある。誘電率を ε として以下の問いに答えよ。端効果は無視できるとする。

(1) 静電容量 C を与えられた条件から導け。

(2) コンデンサに直流電圧源をつないで電荷 Q を充電した後電圧源を外す。このとき、コンデンサに蓄えられる静電エネルギー W を与えられた条件から導け。

(3) (2)の状態で電極の間隔をゆっくりと広げる。このとき静電エネルギー W はどの様になると予想されるか。50 字程度で定性的に説明せよ。

問題９（電気・電子回路）

［１］２端子対回路において、電圧と電流の関係は $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ と表せる。図１ (a)、(b) の回路各々について、インピーダンスパラメータ $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ を求めよ。

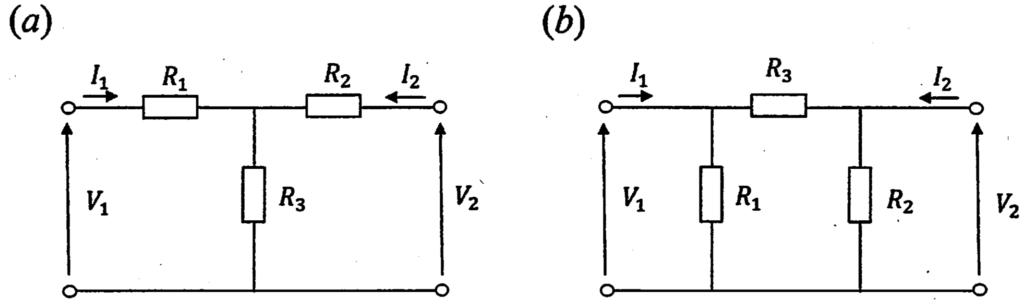


図１

［２］　交流回路に関する以下の問いに答えよ。

（１）図２ (a) に示す回路について、電源電圧に対し電流 I_L の位相差が $-45°$ となる角周波数を求めよ。また、その角周波数において、電流 I_L の振幅は電源電流の振幅の何倍となるか。ただしオペアンプのオープンループ・ゲインは ∞、入力インピーダンスは $\infty\,(\Omega)$、出力インピーダンスは $0\,(\Omega)$ とする。

（２）図２(b) に示す回路について、電源電圧に対する電源電流の位相差の絶対値が最も大きくなる角周波数を求めよ。ただし位相差は $-180°\sim180°$ の範囲で定義されているものとする。

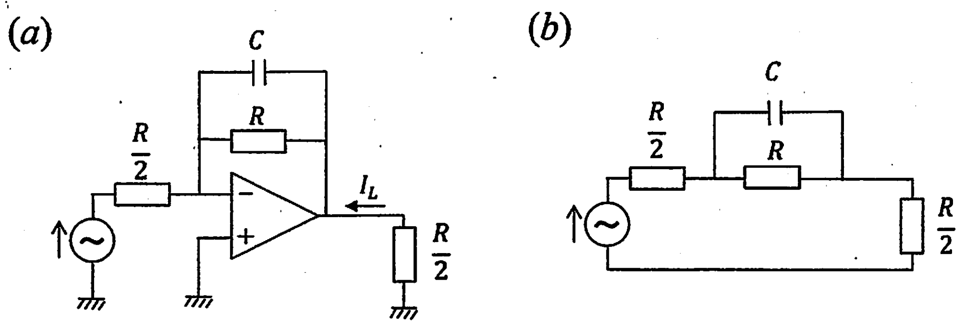


図２

問題１０（小作文）

エネルギー量子工学専攻を志望する理由について、その経緯、入学後にしたい勉強や研究、修了後の進路希望などを含めて、１０００字程度で説明しなさい。
なお、作文には升目の用紙を使用すること。

判定基準

1) 志望する理由について明確に記述されていること。
2) 入学後にしたい勉強、研究について明確に記述されていること。
3) 将来の進路について記述されていること
4) それぞれの記述が論理的であること
5) エネルギー量子工学専攻を志望する強い動機があること

上記5項目について、配点をそれぞれ１０点として採点する。