令和４年８月２２日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和５年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

１．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題を選択し、合計２題を解答すること。
（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（必須）

［１］（１）行列 $\boldsymbol{A}$ に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（２）行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{P}$ 及びその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ。

（３）行列 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{P}$ 、 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて下記の連立微分方程式を満足するゼロ以外の解 $x(t), y(t), z(t)$ を求めよ。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{dz(t)}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

［２］２つの面　$x^2+y^2-z=0$ …①、及び　$2x+2y+z=2$ …②を考える。

（１）面①上の点 $(x,y,z)=(1,1,2)$ において面①に接する平面の方程式を求めよ。

（２）（１）の接点において面①に垂直に交わる直線の方程式を求めよ。

（３）面①②で囲まれる部分の体積を求めよ。

［３］下記の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ。

（１）$\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0$

（２）$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\dfrac{1-x^3}{x}$

（３）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\sin x-y^2\sin x=0$

問題２（選択）

［１］z を複素数とするとき、$z^3=-i$ の根を全て示せ。

［２］次の複素関数 $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ $\left(z\in\mathbb{C},\ 0<|z-1|<\infty\right)$ の特異点における留数を求めたい。以下の問いに答えよ。

（１）複素関数 e^z $\left(z\in\mathbb{C}\right)$ の $z=1$ を中心としたテイラー展開を求めよ。

（２）複素関数 $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ $\left(z\in\mathbb{C},\ 0<|z-1|<\infty\right)$ の $z=1$ を中心としたローラン展開を求めよ。

（３）複素関数 $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ $\left(z\in\mathbb{C},\ 0<|z-1|<\infty\right)$ の特異点 $z=1$ は何位の極か、また、$z=1$ における留数を求めよ。

［３］実積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ を留数定理を用いて解くことを考える。以下の問いに答えよ。

（１）$z=e^{i\theta}$ と置くと、$\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$ となる。実積分 I を z についての単位円周 $|z|=1$ に沿った複素積分の形に書き換えよ。

（２）（１）で求めた複素積分の被積分関数の特異点を求めよ。また、その中で z についての単位円周 $|z|=1$ の内側にあるものを示せ。

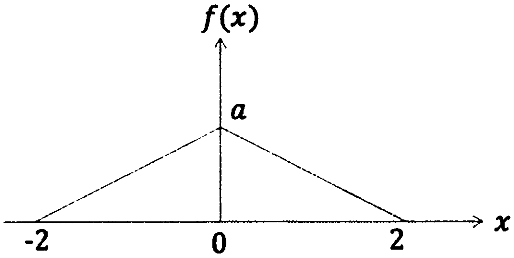
（３）留数定理を用いて実積分 I を求めよ。

問題３（選択）

［１］$f(x)$のフーリエ変換を

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

と定義する。ただし，x、ωは実数、i は虚数単位とする。図に示す関数$f(x)(a > 0)$のフーリエ変換が$\mathcal{F}(\omega) = a\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}$となることを示せ。



［２］関数 $f(t)$ のラプラス変換を以下の様に定義する。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

以下の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

（１） $\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 7\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 10f(t) = 0 \qquad (f(0) = 2,\ \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t} = 1)$

（２） $\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + y(x,t)$

ただし、$y(x,0) = e^{-x}$とする。また、必要に応じて以下の式を用いよ。

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$