令和３年８月２３日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和４年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプI）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

1. 以下の８題を解答せよ。
   （力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
   （配点：各題２５点、合計２００点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（力学）

[1] 質量M、半径r、長さaの円柱について中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

[2] 質量M、半径r、長さaの円柱に質量と太さの無視できる糸を十分な長さ巻き付け、机の端より距離 L のところに置いた。この円柱に図１に示すように糸が机と平行になるようになめらかな滑車を取り付け、糸の端に質量 m のおもりを取り付けた後に静かに離したところ、円柱はすべらずに転がった。重力加速度をgとして以下の問いに答えよ。

(1) 糸の張力をTとしておもりの運動方程式を示せ。

(2) 円柱と床の摩擦力をFとして、円柱の回転に関する運動方程式を示せ。

(3) これらの運動方程式を解いて落下加速度及び糸の張力Tを求めよ。

(4) 円柱が机の端に達するまでの時間及び端に達したときの速度を求めよ。ただし、円柱は静止状態から転がりはじめるとする。

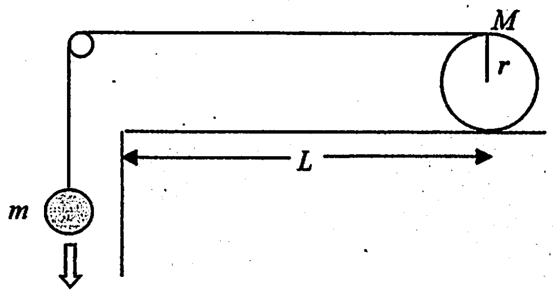


図１

問題２（物理化学）

以下の問いに答えよ。

（１） ある物質の 1.0 bar（0.10 MPa）での融点は 300 K、その時の固体と液体の密度はそれぞれ 0.95、1.0 kg dm^{-3} 、融解エンタルピー $\Delta_{fus}H^{\circ}$ は + 6.0 kJ mol^{-1} である。この物質を 1 bar から 101 bar に加圧することによる融点の変化を求めよ。有効数字は 2 桁とし、下がる場合はマイナスを付けること。この物質の分子量は 0.019 kg mol^{-1} とせよ。

（２） 溶媒Ａと溶質Ｂからなる理想溶液の 300 K でのＡの蒸気圧は 7.60 kPa である。純溶媒Ａの 300 K での蒸気圧が 8.00 kPa であるとき、溶質Ｂのモル分率 x_B を求めよ。有効数字は 2 桁とせよ。

（３） （２）の理想溶液と純溶媒Ａを半透膜を介して 300 K で接触させた。このとき発生する浸透圧 Π（MPa）を求めよ。有効数字は 2 桁とせよ。なお、Ａの分子量は 0.050 kg mol^{-1}、純液体Ａの 300 K における密度は 1.0 kg dm^{-3} とする。また、気体定数 R = 8.3 J K^{-1} mol^{-1} を用いよ。

（４） （３）において、理想溶液と純溶媒 A のどちらの液体の圧力が上昇するかについて、その理由とともに説明せよ。

問題３　（熱力学／統計力学）

単原子分子理想気体からなる温度Tの体系について、以下の問いに答えよ。体系は熱平衡状態にあり、分子は質量mの質点と見なせるものとする。ボルツマン定数はk_Bとする。なお、解答に対する指示のない部分では、$1/k_BT$をβと表してよいものとする。

（１）ある分子の運動エネルギーeを、運動量pのx成分(p_x)、y成分(p_y)、およびz成分(p_z)を用いて書き表せ。

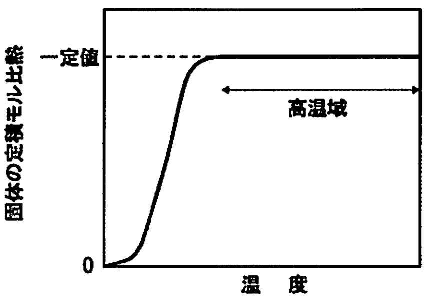
（２）分子の運動エネルギーの平均値$\langle e\rangle$を、ボルツマン因子を含む①式のように表すことができる。空欄「ア」と「イ」の部分を正しく記入せよ。$d\boldsymbol{r}$と$d\boldsymbol{p}$は、それぞれ位置$\boldsymbol{r}$（成分x, y, z）と運動量$\boldsymbol{p}$（成分p_x, p_y, p_z）の微小変化を表す。

$$\langle e\rangle = \frac{\boxed{ア}}{\int \boxed{イ}\, d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{p}} \qquad ①$$

（３）（１）と（２）の結果をもとに、$\langle e\rangle$をk_BとTを用いて表せ。導出の過程も詳しく記すこと（導出部分ではβを用いて良いものとする）。

（４）体系が１モル（N_A個）の分子から構成される場合、定積モル比熱C_Vを、気体定数Rを用いて表せ。

（５）固体（単原子結晶）の場合、右図のように、高温域ではデュロン-プティの法則に従い、定積モル比熱は一定の値を示す傾向がある。固体の定積モル比熱（高温域での一定値）は、（４）で求めた単原子分子理想気体の定積モル比熱の何倍に相当するか答えよ。



（６）単原子分子理想気体と固体に、（５）で求めた定積モル比熱の差異が生じる理由を説明せよ。

問題４（電磁気学）

誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。必要な物理量は適宜定義してよい。

（1）　電場 $\vec{E}$ に関する積分形のガウスの法則を示せ。

（2）　無限に広い平面に電荷が一様な面密度 σ で分布しているとき、電場の強さ E をガウスの法則を使って求めよ。ガウス閉曲面を描いて計算過程を詳述すること。

（3）　無限に広い平面２枚が平行に置かれていて、各平面には電荷がそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ で一様に分布している。

(a) ２枚の平面の外側の電場の強さ E を求めよ。

(b) ２枚の平面の内側の電場の強さ E を求めよ。

（4）　極板面積 S、極板間隔 d の平行平板コンデンサがある。

(a) 電気容量が $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ となることを説明せよ。

(b) 極板１には電荷 q 、極板２には電荷 $-q$ がそれぞれ与えられているとき、極板２から極板１へ微小電荷 Δq を移動させるのに必要な仕事 ΔW を C、q、Δq を用いて表せ。

問題5（量子力学）

水素原子内の電子について以下の問いに答えよ。

(1) 基底状態での規格化された波動関数は、球座標(r,θ,ϕ)を用いて以下のように表される。ただしa_0はボーア半径である。

$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$$

原点からの距離がrから$r+dr$の球殻内に電子が見出される確率を$P(r)dr$とする。$P(r)$が最大となる距離r_{m}を計算せよ。また$P(r)$の概形を描け。

(2) 動径座標rに対する運動量演算子を

$$\hat{p}_r=-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

とするとき、基底状態での期待値$\langle\hat{p}_r\rangle$を計算せよ。必要なら以下の積分公式を用いよ。

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}dr=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\qquad(\alpha>0,n\geq 0)$$

(3) 以下の交換関係を計算せよ。ただし$\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z$は角運動量の$x,y,z$成分の演算子であり、$\hat{l}^2=\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2$とする。

(a) $[\hat{r},\hat{p}_r]$,　(b) $[\hat{l}_z,\hat{l}_x]$,　(c) $[\hat{l}^2,\hat{l}_z]$

(4) 主量子数$n=3$の状態において、$\hat{l}^2$を測定した場合に得られる可能性がある値をすべて記せ。また$\hat{l}_z$を測定した場合に得られる可能性がある値をすべて記せ。

問題６（輸送現象論）

以下の問いに答えよ（裏面にも設問があることに注意せよ）。

［１］ 次の文章の(1)～(7)の空所に、文意が合う様に適当な語句、式、単位のいずれかを挿入せよ。

固体内あるいは静止流体内の温度Tがy方向に温度勾配$\frac{dT}{dy}$を持つ場合、y軸に垂直な面を通して高い温度の方から低い温度の方に熱が輸送される。(1)__________の熱伝導法則と呼ばれる熱輸送に関する基本法則では、単位時間、単位面積当たりに輸送される熱量q_y（熱流束）は(2)__________と表される。ここで、比例係数kは(3)__________と呼ばれる固体もしくは流体の物性値で、その SI 単位は(4)__________である。

流体が気体である場合、この熱の輸送現象を気体分子の運動論と関係付けて、その物理的意味を考える。熱平衡にある多数の気体分子は、互いに衝突し運動エネルギーを交換する。図に示すように、y方向に温度分布$T(y)$を持つ場合を考える。ここでは、気体分子は$y=0$でy軸に垂直な面（$y=0$面）からδだけ離れた場所で他の分子と衝突して$y=0$面に到達するものとし、$y=\delta$および$y=-\delta$にある気体分子の温度を、それぞれ、$T(\delta)$および$T(-\delta)$とおく。

$y=0$面を通じた気体分子の運動と相互作用により、高い温度の領域から低い温度の領域へ運動エネルギーが運ばれる。このとき、$y=0$面を通過する気体分子によって単位面積、単位時間当たりに交換される運動エネルギーの差がq_yになるので、単原子分子の気体の場合、これを式で表すと(5)__________となる。但し、気体分子１個の質量をm、y軸に垂直な面を単位面積、単位時間当たりに通過する分子数をjとし、平均速度$\bar{u}$の単原子気体分子１個の運動エネルギー$m\bar{u}^2/2$は温度に比例し、$m\bar{u}^2/2=aT$（aは比例定数）の関係を用いる。

さらに、y方向の$-\delta$～δの間で温度分布が直線で近似できるとし(5)を整理すると、q_yとdT/dyの間に(6)__________の関係を得る。従って、(2)と(6)を比較し、$\delta=2\lambda/3$および$j=n\bar{u}/4$（λは気体分子の平均自由行程、nは気体の分子数密度）の関係を用いると、比例係数kについて(7)__________の関係を得る。

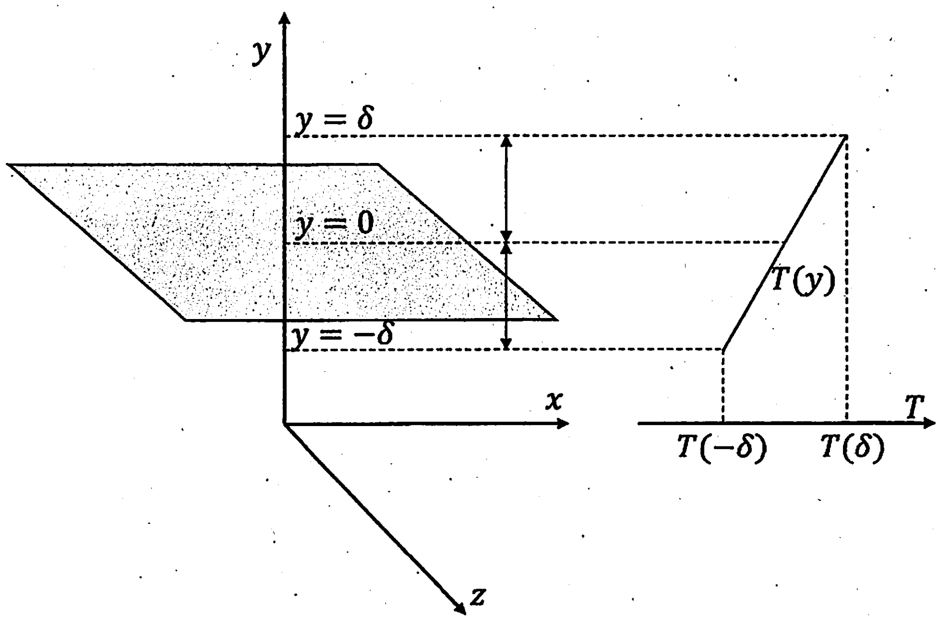


図　気体中における$y=0$面の上下の温度分布

（裏面に続く）

［２］ 密度ρ、粘性係数μの流体中を速度uで運動する直径Dの球に作用する抗力（抵抗）F_dを考える。このとき、F_dは、ρ、μおよびuの関数として

$$F_d = K(\rho)^a(\mu)^b(u)^c(D)^d \qquad \text{(A)}$$

で表されるものと仮定する。ここで、K、a、b、cおよびdは次元を持たない定数である。このとき、以下の問いに答えよ。

（１） （A）式を用いた次元解析によって得られる無次元数の個数をバッキンガムのπ定理により求めよ。

（２） （A）式を用いた次元解析によって、次式で定義される抵抗係数C_dを無次元数の関数式（無次元式）で表せ。但し、導出に当たっては、a、cおよびdをbの関数として表すこと。

$$C_d = \frac{F_d/A}{\rho u^2/2}$$

ここで、Aは抵抗を受ける物体の流れ方向への投影面積である。

（３） （２）で導いた抵抗係数の無次元式の右辺に現れる無次元数は一般に何と呼ばれるか。また、その物理的意味について簡単に説明せよ。

問題 7（固体物理学）

自由電子モデルを用いて立方体金属（一片の長さ:L, 原子数:N, 原子間隔:a）中の電子の振る舞いを考える．自由電子(質量:m, 電荷: $-q<0$）が波動関数 $\phi(x,y,z)$,

$$\phi(x,y,z) = A\exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}, \quad (A\text{は定数})$$

に従って周期境界条件を満足しながら運動している．電子波の波数ベクトルは$\boldsymbol{k}$(ただし, $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$)である．この時，電子波が取り得る波数は $\boldsymbol{k}=$（ ① ）であり，(a)電子波のエネルギー εは，$\varepsilon=$（ ② ）である．ここで，$n_s = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, $s = x, y, z$ である．電子波の群速度($\boldsymbol{v}_g$)は，$\boldsymbol{k}$およびεを用いて $\boldsymbol{v}_g=$（ ③ ）と表される．

この金属に時間的・空間的に一様な電界$\boldsymbol{E}$を印加する．この時，電子が受ける力は電界による力のみとすると，$\boldsymbol{k}$の時間変化は，$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=-\frac{q\boldsymbol{E}}{\hbar}$ … (b) と表される．この他に電子の散乱に起因する抵抗力を考慮する必要があるが，ここでは考えないこととする．一方，電子波の群加速度は，εおよび$\boldsymbol{k}$を用いて，$\frac{d\boldsymbol{v}_g}{dt}=$（ ④ ）となる．この式から，電界$\boldsymbol{E}$の中では電子があたかも見かけの質量 $m^*=$（ ⑤ ）を持って運動していることがわかる．m^*は（ ⑥ ）と呼ばれるものである．

(1) 文章中の（ ① ）～（ ⑥ ）に入る適切な語句または数式を答えよ．
(2) (b)式を導け．
(3) 下線部(a)について，εとkの分散関係を図示せよ．kは連続的に変化するものと見なしてよい．

金属中の伝導電子はイオン核が作る周期的ポテンシャル場による弱い摂動を受ける．以下では，一次元金属（長さ:L, 原子数:N, 原子間隔:a）中の伝導電子の運動を考える．電子波の波数ベクトルを$\boldsymbol{k}$（ただし，$k=|\boldsymbol{k}|$）とする．$\varepsilon, \boldsymbol{v}_g$, および m^* は上で定義したものと同じとする．

(4) 周期的ポテンシャル場による弱い摂動を受ける伝導電子のεとkの分散関係を還元領域の表現を用いて図示せよ．
(5) (4)で描いた図に基づいて，第一ブリユアン領域中での金属中の伝導電子のv_gおよびm^*とkの関係を，それぞれ図示せよ．ただし，$v_g=|\boldsymbol{v}_g|$である．
(6) (3)および (4) で描いた分散関係の違いは，金属中に禁止帯が存在することと関係する．禁止帯が現れる理由を説明せよ．

問題８　（原子物理学）

［１］ 静止質量 m_0 の粒子が光速に対して無視できない速度で運動しているとする。この状態において以下の問いに答えよ。

(1) この粒子が運動エネルギーTを持っているとする。この時の速度 v はどのように表されるか示せ。なお、光速は c とせよ。

(2) この粒子が運動量 p で運動しているとする。この時の粒子の全エネルギーE は p、m_0 および光速 c を用いるとどのように表されるか示せ。

［２］ 光子と電子の相互作用に関する以下の問いに答えよ

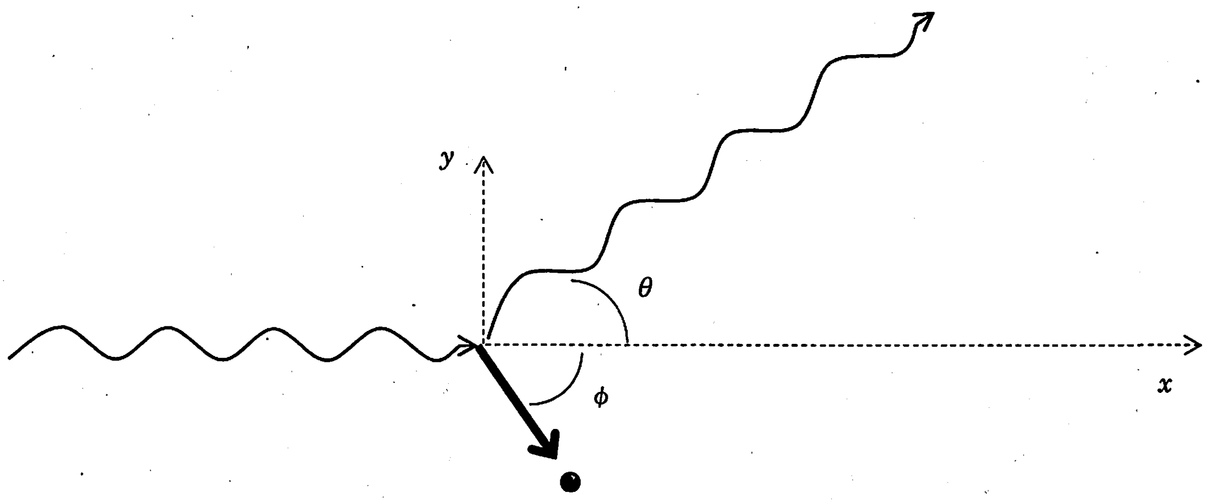
(1) 波数 k、角振動数$\omega = ck$の電磁波（光子）を考える。この光子の運動量 p は$\hbar = {}^{h}/_{2\pi}$の表記を用いると$p = \hbar k$と表される。このとき、光子のエネルギーは$\hbar, c$ および k を用いるとどのように表されるか示せ。なお、c は光速である。

(2) 波数 k_0 の光子が x 方向に進んでいるとする。この光子が静止した電子（静止質量 m_e）と衝突し、図に示すようにθ方向に散乱され、波数 k_1 に変化し、電子は ϕ 方向に運動量 p で反跳されたとする。この時の反跳前後の運動量保存の式を x 方向及び y 方向について示せ。

(3) 反跳の前後でのエネルギー保存式を示せ。ただし、電子については相対論を考慮すること。

(4) 反跳後の電子の運動量 p を k_0、k_1、$\hbar$、及びθを用いて表せ。

(5) 反跳前後の光子の波長の変化$\Delta\lambda$（$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$）を$\hbar$、$m_e$、$c$ およびθを用いて表せ。



図

令和３年８月２３日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和４年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅡ）についての注意

試験時間　１３：３０～１６：３０

1. 以下のうちあらかじめ届け出た３題を解答せよ。また小作文（問題１０）を作成せよ。
   （力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学、電気・電子回路）
   （配点：各題５０点、合計２００点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ（裏面も使用可）。ただし、小作文は升目の用紙に記入すること（裏面は使用不可）。

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題 1（力学）

[1] 質量 M、半径 r、長さ a の円柱について中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

[2] 質量 M, 半径 r、長さ a の円柱に質量と太さの無視できる糸を十分な長さ巻き付け、机の端より距離 L のところに置いた。この円柱に図 1 に示すように糸が机と平行になるようになめらかな滑車を取り付け、糸の端に質量 m のおもりを取り付けた後に静かに離したところ、円柱はすべらずに転がった。重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

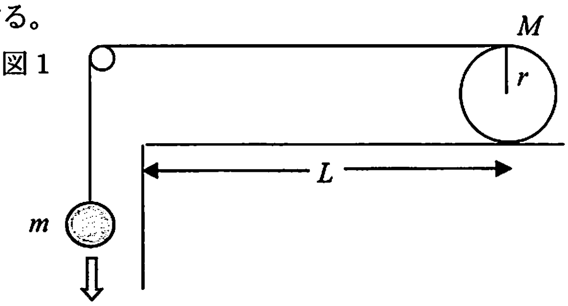
(1) 糸の張力を T としておもりの運動方程式を示せ。

(2) 円柱と床の摩擦力を F として、円柱の回転に関する運動方程式を示せ。

(3) これらの運動方程式を解いて落下加速度及び糸の張力 T を求めよ。

(4) 円柱が机の端に達するまでの時間及び端に達したときの速度を求めよ。ただし、円柱は静止状態から転がりはじめるとする。

図 1



[3] 質量 m_a の質点を、質量の無視できるばね定数 k のばねの一端につないだ。さらにそのばねのもう一つの端を質量 M_b の台車につないだ。質点と台車の間の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えよ。

(1) 台車を固定することで、台車上の質点が動いた場合も台車は動かないようにした(図 2)。この状態で質点を、つり合いの位置から L だけ伸ばして静止した状態で時刻 $t = 0$ で静かに手を離す。時刻 t における質点のつり合いの位置からの変位を x として運動方程式を記述し、それを解いて質点位置の時間変化を示せ。

(2) 次に台車と質点をつり合いの位置から伸ばして、時刻 $t=0$ で台車の固定を取り外すと同時に台車と質点を静かに手から離したところ、台車と質点は摩擦なしに振動した。ある時刻 t における質点のつり合い位置からの変位を x、台車のつり合いの位置からの変位を X としてそれぞれに対する運動方程式を記述せよ。

(3) 手を離した後の質点と台車の間の質量中心位置の時間変化を求めよ。

(4) 質点と台車が振動するときのばねの周期を求めよ。

図 2

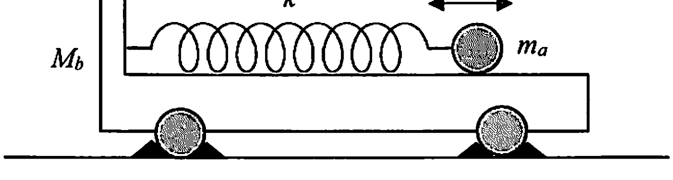
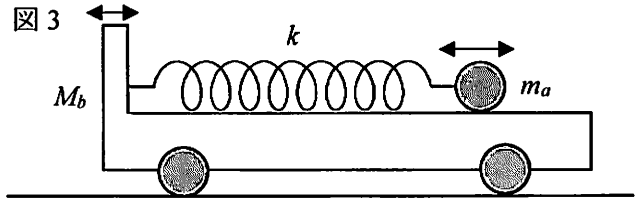


図 3



問題４（電磁気学）

［１］　誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。必要な物理量は適宜定義してよい。

（１）　電場 $\vec{E}$ に関する積分形のガウスの法則を示せ。

（２）　無限に広い平面に電荷が一様な面密度 σ で分布しているとき、電場の強さ E をガウスの法則を使って求めよ。ガウス閉曲面を描いて計算過程を詳述すること。

（３）　無限に広い平面２枚が平行に置かれていて、各平面には電荷がそれぞれ面密度 $+\sigma$ と $-\sigma$ で一様に分布している。

(a) ２枚の平面の外側の電場の強さ E を求めよ。

(b) ２枚の平面の内側の電場の強さ E を求めよ。

（４）　極板面積 S、極板間隔 d の平行平板コンデンサがある。

(a) 電気容量が $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ となることを説明せよ。

(b) 極板１には電荷 q 、極板２には電荷 $-q$ がそれぞれ与えられているとき、極板２から極板１へ微小電荷 Δq を移動させるのに必要な仕事 ΔW を C、q、Δq を用いて表せ。

(c) コンデンサが電荷 Q を蓄える時の静電エネルギーを求めよ。

(d) 極板間のエネルギー密度が $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ であることを示せ。

［２］ 陽子（電荷は$q = 1.6 \times 10^{-19}$ C）が速度 $\vec{v}$ で磁束密度 $\vec{B}$ の中を運動している。以下の問いに答えよ。

（１） ローレンツ力 $\vec{F}$ を示せ。

（２） 磁束密度の単位 T が、$1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N\,A^{-1}\,m^{-1}}$ となることを示せ。

（３） $\vec{v}$ と $\vec{B}$ は直交座標系の単位ベクトルを使って次式で与えられる。

$$\vec{v} = 1.5 \times 10^5 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{e_z}\right)\ \mathrm{m/s} \qquad \vec{B} = 1.4\,\vec{e_z}\ \mathrm{T}$$

(a) $\vec{e_x} \times \vec{e_z}$ を計算せよ。

(b) $\vec{F}$ を求めよ。

問題5（量子力学）

[1] 水素原子内の電子について以下の問いに答えよ。

(1) 基底状態での規格化された波動関数は、球座標(r,θ,ϕ)を用いて以下のように表される。ただしa_0はボーア半径である。

$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$$

原点からの距離がrから$r+dr$の球殻内に電子が見出される確率を$P(r)dr$とする。$P(r)$が最大となる距離r_{m}を計算せよ。また$P(r)$の概形を描け。

(2) 動径座標rに対する運動量演算子を

$$\hat{p}_r=-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

とするとき、基底状態での期待値$\langle\hat{p}_r\rangle$を計算せよ。必要なら以下の積分公式を用いよ。

$$\int_0^{\infty}r^n e^{-\alpha r}dr=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\qquad(\alpha>0,n\geq 0)$$

(3) 以下の交換関係を計算せよ。ただし$\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z$は角運動量の$x,y,z$成分の演算子であり、$\hat{l}^2=\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2$とする。

(a) $[\hat{r},\hat{p}_r]$,　　(b) $[\hat{l}_z,\hat{l}_x]$,　　(c) $[\hat{l}^2,\hat{l}_z]$

(4) 主量子数$n=3$の状態において、$\hat{l}^2$を測定した場合に得られる可能性がある値をすべて記せ。また$\hat{l}_z$を測定した場合に得られる可能性がある値をすべて記せ。

[2] 1次元での確率流密度と確率保存則について考える。以下の問いに答えよ。

(1) ポテンシャルを$V(x)$として、時間に依存するシュレディンガー方程式を記せ。

(2) 確率密度$P(x,t)$と確率流密度$S(x,t)$との間には、以下の確率保存則が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0$$

ただし$\psi(x,t)$を粒子の波動関数、mを粒子の質量として

$$P(x,t)\equiv|\psi(x,t)|^2,\qquad S(x,t)\equiv-\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right]$$

である。また$\psi(\pm\infty,t)=0$とする。

(3) 振幅A、波数k、エネルギーEの自由粒子

$$\psi(x,t)=Ae^{i\left(kx-\frac{E}{\hbar}t\right)}$$

の確率流密度$S(x,t)$を計算せよ。

問題９（電気・電子回路）

［１］以下の問いに答えよ。

（１）図１(a) の回路において、時刻 $t=0$ で SW を閉じた。$t \leq 0$ ではキャパシタは帯電していなかった。$t \geq 0$ における電流 I を求めよ。

（２）図１(b) に示す定常状態にある閉回路において、電流の振幅 I および電源電圧との位相差 δ を求めよ。

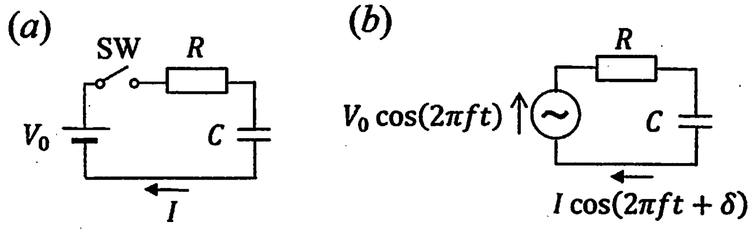


図１

［２］ 図２の回路について、以下の問いに答えよ。オペアンプ自身の入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスは零とする。

（１）R_i, R_f のみに依存する変数 K, β を用い、オペアンプ反転入力電圧 $V_{\mathrm{IN-}}$ を $V_{\mathrm{IN-}} = KV_0 + \beta V_L$ という形で表せ。

（２）V_L を R_i, R_f, A, V_0 で表せ。

（３）A を無限大として、電流 $I_f, I_L, I_{\mathrm{OPE}}$ を求めよ。

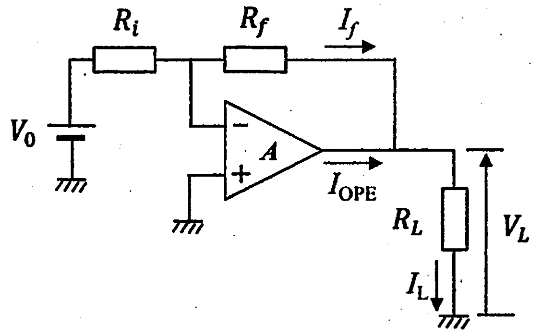


図２

問題１０　（小作文）

量子物理が関連した自然科学（物理、化学、生物、天文、地学など）現象や工学で最近関心を抱いた事柄について、関心を抱いた理由を含めて説明しなさい。さらに大学院での研究や履修の志望も加えて、升目の作文用紙に1000字程度で記述しなさい。

令和３年９月６日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和４年度修士課程入学試験 追試験

「専門科目」（タイプＩ）についての注意

試験時間　１３：３０～１６：３０

1. 以下の８題を解答せよ。
   （力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
   （配点：各題２５点、合計２００点満点）

2. 解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

3. 解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（力学）

図１に示すように長さ L の糸に質量 m の質点をつるし、ばね定数 k、自然長 a のばねをつなぐ。ばねのもう一端は水平に距離 a だけ離れた壁に固定されている。この質点をばねと同じ面内で微小振動させる場合を考える。ただし糸およびばねの質量は無視できる。また質点が振動するとき，ばねの支点と質点の水平方向の高さの違いは非常に小さく無視して良い。(図中角度 $\phi \approx 0$)

(1) 質点の運動エネルギーを求めよ。ただし糸と鉛直線とのなす角を θ とする。

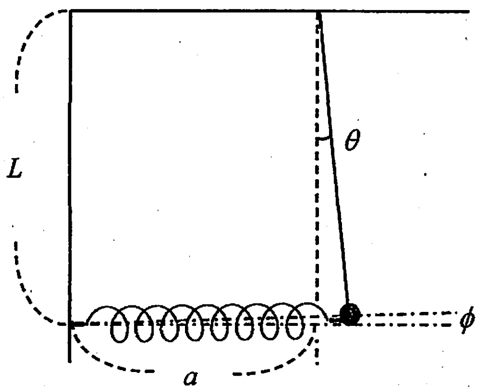
(2) 質点のもつ重力によるポテンシャルエネルギー、ばねの伸縮によるポテンシャルエネルギーをそれぞれ求めよ。ただし、質点の最下点を基準点とする。

(3) 以上よりこの系のラグランジアンを求めよ。

(4) ラグランジュの運動方程式より、角 θ に対する運動方程式を求めよ。

(5) 質点を微少角 θ_0 傾け静止させた後、時刻 $t=0$ で手を離す。(4) 式を解いて角 θ の時間変化を示す式を求めよ。ただし、$\sin\theta \sim \theta$ および $\cos\theta \sim 1$ と近似して良い。

図１



問題２（物理化学）

以下の問いに答えよ。

（１） 溶媒Aと溶質Bからなる理想溶液と純溶媒Aを半透膜を介して300 Kで接触させた。このとき発生する浸透圧Πは2.5 MPaであった。溶質Bのモル分率x_Bを求めよ。有効数字は２桁とせよ。このとき、Aの分子量は0.050 kg mol^{-1}、純溶媒Aの300 Kにおける密度は1.0 kg dm^{-3}とする。気体定数$R = 8.3$ J K^{-1} mol^{-1}を用いよ。

（２） 浸透圧が発生する理由について、以下の文言を用いて説明せよ。使った文言には下線を引くこと。

半透膜、浸透圧、純溶媒、溶液、化学ポテンシャル、平衡

（３） 溶媒Aと溶質Bからなる理想溶液の300 KでのAの蒸気圧は3.80 kPaである。純溶媒Aの300 Kでの蒸気圧が4.00 kPaであるとき、溶質Bのモル分率x_Bを求めよ。有効数字は２桁とせよ。この計算に用いる法則の名を記せ。

（４）クラペイロンの式を２相（α，β）の化学ポテンシャルの平衡式($\mathrm{d}\mu_\alpha = \mathrm{d}\mu_\beta$)から導け。使用する記号は常用のものを用いよ。水と氷の場合、相平衡での圧力と温度の関係$\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$の符号は正か負か、理由と共に答えよ。

問題３　（熱力学／統計力学）

マクスウェルの速度分布則に従う気体では、速さが v と $v + dv$ の範囲内にある分子の数 $F(v)dv$ を①式のように記述することができる。これについて、以下の問いに答えよ。なお、N は気体中の全分子数、m は分子の質量、T は温度、k_B はボルツマン定数を表す。気体は熱平衡状態にあるものとする。

$$F(v)dv = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv \qquad ①$$

（１）横軸をv、縦軸を$F(v)$ として、関数 $F(v)$ の分布（概形）を図示せよ。なお、作図には以下の点を反映させること。

- $v = 0$ の場合に $F(v)$ の値がどうなるか。
- $v = \infty$ の場合に $F(v)$ の値がどうなるか。

（２）$F(v)$の値が最大となる速さ v_m を m、T、k_B を用いて表せ。

（３）①式をもとに、ある分子の速さが v と $v + dv$ の範囲内にある確率 $P(v)dv$ を書き表せ。

（４）（３）の結果をもとに、速さ v の平均値 $\langle v \rangle$ を m、T、k_B を用いて表せ。必要に応じて以下の積分公式を用いること。

$$\int_0^\infty x^3 \exp(-\alpha x^2)\, dx = \frac{1}{2\alpha^2} \quad (\alpha > 0)$$

（５）v_m と $\langle v \rangle$ の大小関係を比較し、差異がある場合は（１）で図示した$F(v)$ の分布をもとに理由を説明せよ。

（６）（４）と同様の手順で v^2 の平均値を求めると、$\langle v^2 \rangle = 3k_B T/m$という結果を得る。この結果をもとに、エネルギーの等分配則、すなわち分子の運動エネルギー e の平均値は、一つの自由度あたり $k_B T/2$ ずつ分配される（x 方向、y 方向、z 方向、いずれの成分の平均値も $k_B T/2$ となる）ことを示せ。

問題４（電磁気学）

点電荷 q_1 が座標原点にある。 誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

（１） 原点を基準とする位置 $\vec{r}$ での電場 $\vec{E}$ を求めよ。

（２） 位置 $\vec{r}$ に点電荷 q_2 を置くとき、q_1 から q_2 に働く力 $\vec{F}$ を求めよ。

（３） 無限遠を基準として位置 $\vec{r}$ における電位 V を求めよ。

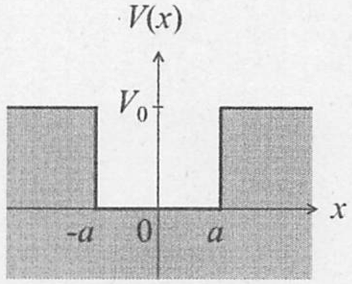
（４） $q_1 = -2.0\ \mathrm{nC}$ 、 $\vec{r} = (-1, \sqrt{3},\ 0)\ \mathrm{m}$ のとき電場 $\vec{E}$ を計算してその x, y, z 成分を単位と共に示せ。ただし真空の誘電率は $8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}m^{-2}}$ としてよい。

（５） 十分細い導線でできた半径 a のリングに総電荷 Q が一様に分布している。リングの中心軸上にあって、リング中心からの距離が d である点 P における電場の大きさを求めたい。

(a) リング上の微小電荷 dQ による電場 dE の大きさを求めよ。

(b) リングの総電荷 Q による電場 E の大きさを求めよ。

問題5（量子力学）



図のような有限の深さの井戸型ポテンシャル$V(x)$中に、質量m、エネルギー$E(< V_0)$の粒子が存在する場合の、時間を含まないシュレディンガー方程式の解のうち、以下の偶関数の解について考える。

$$u(x) = \begin{cases} Be^{k_2 x} & (x < -a) \\ A\cos k_1 x & (-a \leq x \leq a) \\ Be^{-k_2 x} & (a < x) \end{cases}$$

(1) k_1およびk_2を$E, V_0, m, \hbar$を使って表せ。またその結果から$k_1, k_2, V_0, m, \hbar$の間に成り立つ関係を導け。

(2) 偶関数の解が満たすべき境界条件（連続条件）をすべて、A, B, k_1, k_2, aを使って表せ。またその結果からk_1, k_2, aの間に成り立つ関係を導け。

(3) (1)(2)の結果から、偶関数の解がn個存在する場合にV_0とaが満たすべき条件を導け。

(4) 粒子が井戸の中に発見される確率$P_{|x|<a}$をA, k_1, aを使って表せ。

(5) 偶関数の解が２個存在する場合に、その２つの波動関数の概形をそれぞれ図示せよ。

問題６（輸送現象論）

［1］ 次の文章は、対流熱伝達に関する説明である。（ 1 ）～（ 6 ）の空所に適当な語句、式、単位のいずれかを挿入せよ。

固体壁とそれに沿って流れる流体との間の対流熱伝達を考える。この場合、伝熱面積A、温度T_wの固体壁面からバルク温度$T_b (< T_w)$の流体への単位時間当たりの伝熱量が$Q_w =$（ 1 ）で表されるとき、この式に表れるhは熱伝達係数と呼ばれ、その単位はSI単位で（ 2 ）である。また、伝熱面において熱は伝導のみによって輸送されるので、固体壁から固体壁に垂直に流体側が正になるように座標軸yを定め、伝熱面における流体の温度勾配を$\left.\frac{dT}{dy}\right|_w$、流体の熱伝導率を$k$とすると、熱輸送に関する（ 3 ）の熱伝導法則より$Q_w =$（ 4 ）とおくことができる。従って、$Nu \equiv$（ 5 ）によって定義されるヌセルト数は、$\left.\frac{dT}{dy}\right|_w$を用いて表すと$Nu =$（ 6 ）となる。ここで、$l$は伝熱面の大きさを表す流路の代表長さである。この式から、ヌセルト数が伝熱面における流体の温度勾配と熱伝導のみが生じる場合の流体の温度勾配の比を代表する無次元数であることが分かる。

［2］ 直径dの水平円管内を流れるニュートン流体を考える。流れは十分に発達した層流であり、円管の長さlの間での圧力損失の大きさをpとするとき、以下の問いに答えよ。但し、流体の密度ρ及び粘性係数μは一定であるものとする。

（1） 管軸方向の流体の速度uが次の運動方程式を満たすとき、速度分布は管中心（$r = 0$）で最大値となる回転放物面となることを示せ。但し、管壁で流体の速度はゼロとする。

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{p}{l}$$

（2） 管断面での流体の平均速度をu_m、最大速度をu_{max}するとき、$u_m = u_{max}/2$となることを示せ。

（3） 円管内で生じる圧力損失は、流れの速度勾配に伴うせん断応力による摩擦によって生じ、これは管壁に働くせん断応力とバランスする。このとき長さlの円管に働く摩擦による力がpに比例することを示せ。

（4） 円管の摩擦係数C_fは、管壁に働くせん断応力τ_wの大きさが動圧$\rho u_m^2/2$に比例するとしたときの比例係数として次式で定義される。このときC_fは無次元数$\rho u_m d/\mu$に反比例して減少することを示せ。

$$C_f = \frac{|\tau_w|}{\rho u_m^2/2}$$

（5） $\rho u_m d/\mu$は一般に何と呼ばれる無次元数か。また、その物理的意味について簡単に説明せよ。

問題７　（固体物理学）

金属中の電子について、以下の問いに答えよ。
アボガドロ数：N_A、ボルツマン定数：k_B、フェルミエネルギー：ε_F、フェルミ温度 T_F とする。

（１）　絶対温度 T、エネルギーεの電子に対するフェルミ・ディラック分布関数 $f(\varepsilon)$を表す式を、ε_F および必要な物理量を用いて示せ。

（２）　$f(\varepsilon)$は何を表す物理量であるか、説明せよ。

（３）　$T = 0$ (K) および $T = T_1$ (K)における $f(\varepsilon)$とεの関係を図に示せ。ただし、$T_1 > 0$ (K)である。

次に、$T \ll T_F$における金属中の電子による比熱（電子比熱）のおよその大きさを見積もる。ε_F付近にある金属中の電子が温度 T において熱エネルギーを受け取り、高いエネルギー準位に励起されると考える。この時、熱的に励起される電子は、およそε_Fから熱エネルギーの範囲にあると考えてよい。ここでは、金属中の原子数を N とし、１原子当たりの伝導に寄与する電子数を１とする。

（４）熱的に励起された電子による $T = 0$ (K) からのエネルギー増加分 $E(T)$を N、k_B、ε_F、T、T_F の内、必要なものを用いて表せ。

（５）金属１モル当たりの電子比熱 $C_{V,e}$ を求め、$C_{V,e}$ が T に比例することを示せ。解答には N、N_A、k_B、ε_F、T、T_F の内、必要なものを用いよ。

（６）Na 金属のデバイ温度および T_F は、それぞれ 158 K および 3.75 x 10^4 K である。デバイ温度付近では電子比熱が格子振動による比熱に比べて十分に小さいことを説明せよ。

問題８　（原子物理学）

［１］ある金属に照射する光の波長が 310 nm のとき、金属表面より放出される電子の最大運動エネルギーを計測すると 2.0 eV であった。次に、照射する光の波長を 124 nm としたところ、放出される電子の最大エネルギーは 8.0 eV へと増加した。この実験結果から、プランク定数を J・s の単位で求めよ。ただし、電気素量を 1.6×10^{-19} C、真空中の光速を 3.0×10^{8} m/s とせよ。なお、解答では計算過程を示し、計算値は有効数字２桁で求めよ。

［２］ ガンマ線と電子の相互作用に関する以下の問いに答えよ

(1) エネルギーEのガンマ線の運動量は光速を c とするとどのように表されるか。

(2) エネルギーE_0のガンマ線が自由電子により入射方向からθ方向に散乱され、エネルギーがE_1に変化し、電子は ϕ 方向に運動量 p で反跳されたとする。この時の反跳前後の運動量保存の式をガンマ線の入射方向及びガンマ線の入射方向に対して垂直方向について示せ。

(3) 反跳前後のエネルギー保存式を示せ。ただし、電子については静止質量をm_eとし相対論を考慮すること。

(4) エネルギー1.0 MeV のガンマ線が自由電子により、入射方向に対する角度 90° 方向にコンプトン散乱された。このときの散乱ガンマ線のエネルギーと反跳電子の運動エネルギーを、それぞれ MeV 単位で求めよ。ここで、電子の静止質量エネルギーは 0.511 MeV とする。