令和３年８月２３日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和４年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００〜１０：３０

1．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題の、合計２題を解答すること。
（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

2．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

3．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（必須）

［１］（１）行列$\boldsymbol{A}$に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（２）行列$\boldsymbol{A}$を対角化する行列$\boldsymbol{P}$及びその逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$を求めよ。
（３）$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}^n$を求めよ。

［２］下記の積分を実行せよ。

（１）$\iint_R (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　（Rは　$x^2+y^2\leq 1$　を満たす領域）

（２）$\iiint_R (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　（Rは　$x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$　で囲まれた領域）

［３］下記の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ。

（１）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1}{y-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$

（２）$(2x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-4x-2y$

（３）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=\cos 2x$

問題２（選択）

［１］複素関数$f(z)=\bar{z}\,(z\in\mathbb{C})$を図１のように$0, a, a+ib, ib$を頂点とする長方形の辺（積分路$C$と呼ぶ）に沿って積分せよ（$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$を求めよ）。

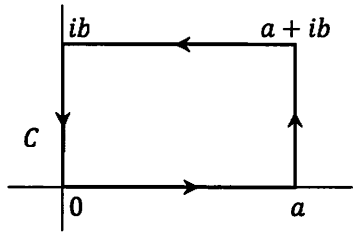


図１

［２］次の複素関数$\frac{1}{1-z}\ (z\in\mathbb{C}, 0<|z|<1)$を展開し、その結果を使って以下の複素関数の原点におけるローラン展開を求めよ。

$$\frac{1}{z^3-z^4}\quad (z\in\mathbb{C}, 0<|z|<1)$$

［３］以下に答えよ。

（１）複素関数$f(z)=\frac{1}{1+z^4}(z\in\mathbb{C})$の４つの極を書け。

（２）図２の閉経路Cにおける$f(z)$の複素積分$\int_C \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$の値を留数定理により求めよ。

（３）図２の円弧部分の経路C_Rにおいて、

$$\int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z\to 0\quad (R\to\infty)$$

を証明し、以下の実積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\quad (x\in\mathbb{R})$$

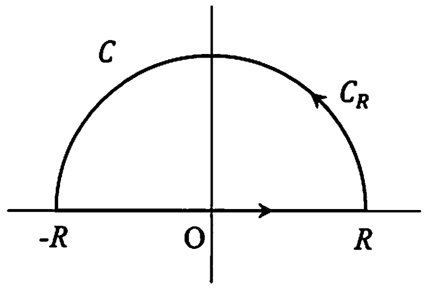


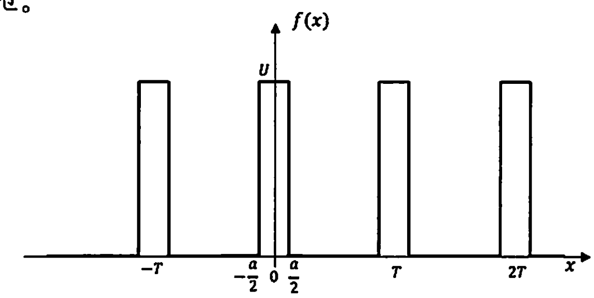
図２

問題３（選択）

［１］次の問いに答えよ。

（１）下図に示す矩形パルス列$f(x)$の複素フーリエ級数を求めよ。

（２）パルスの振幅を$U=\frac{1}{a}$とし、パルス幅aを限りなく小さくした場合$(a\to 0)$、$f(x)$はどうなるかを示せ。



［２］　以下の周期的δ関数（周期T）のフーリエ変換を求めたい。以下の問いに答えよ。

$$\delta_T(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)$$

（１）区間:$-\frac{T}{2}<x<\frac{T}{2}$において$\delta(x)$の複素フーリエ級数は以下で表されることを示せ。ただし、$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$とする。

$$\delta_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\omega_0 x}=\frac{1}{T}(\cdots+e^{-2i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}+e^{0}+e^{i\omega_0 x}+e^{2i\omega_0 x}+\cdots)$$

（２）　$g(x)=e^{in\omega_0 x}$をフーリエ変換せよ。

（３）（１）（２）を用いて$\delta_T(x)$のフーリエ変換を求めよ。

令和３年９月６日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和４年度修士課程入学試験　追試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

1．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題の、合計２題を解答すること。
（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

2．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。(裏面も使用可)
１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

3．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（必須）

［１］ 次の行列$\boldsymbol{A}$に対して下記の問に答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（１）固有値と固有ベクトルを求めよ。
（２）行列$\boldsymbol{A}$を対角化する行列$\boldsymbol{P}$及びその逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$を求めよ。

［２］ 下記の微分、積分を実行せよ。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\cos x)^{e^x}\right]$

（２） $\int(\sin x\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$

（３） $\int\dfrac{\ln x}{x^4}\mathrm{d}x$

［３］ 下記の微分方程式を解き、実関数 $p(x)$ 及び $q(x)$ を求めよ。

（１） $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=e^{x+2p}$

（２） $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=2p+7q \\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=p-4q \end{cases}$

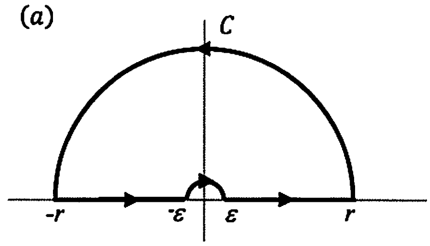
問題２（選択）

［１］zを複素数、aを実数とするとき、

$$\cos z = a$$

を満たすzを全て求めよ。

(a)

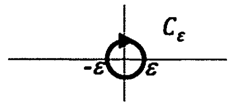


［２］複素数zの関数

$$\frac{2z}{z^2+1}$$

を$z = i$を中心とし、$|z-i| < 2$で Laurent 展開せよ。

(b)



［３］右複素平面図(a)の閉じた積分路Cでの積分

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

を求めよ。

右複素平面図(b)の閉じた積分路C_εでの積分

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$$

を求めよ。以上の結果と$|\varepsilon| \to 0, |r| \to \infty$の極限を考慮することによって実数$x$の積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}z$$

を求めよ。

問題３（選択）

［１］以下の実周期関数$f(t)$に関する問いに答えよ。

$f(t) = A\sin\left({}^{\pi t}/_{T}\right) \quad (0 < t < T)$

かつ全ての t において $f(t+T) = f(t)$ を満たすとする。

（１）関数を図示せよ。

（２）複素フーリエ級数を求めよ。

［２］ 以下の実関数のフーリエ変換を求めよ。

（１）$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$

（２）$f(x) = \delta(x - x_0)$　（デルタ関数）