令和２年９月２３日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和３年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプＩ）についての注意

試験時間　１３：３０～１６：３０

１．　以下の８題を解答せよ。
（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
（配点：各題２５点、合計２００点満点）

２．　解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

３．　解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（力学）

下図に示すように、太陽による引力の無視できる無限遠方において速度 V_i を持つ質量 m の彗星が太陽に向かって近づいて、その後飛び去って行く。このとき、速度の延長線上から太陽に下した垂線の長さは b であった。彗星が太陽に最も近づく距離 R_0 を以下の手順で求めよ。ただし、太陽の質量は $M(M \gg m)$ とする。

(1) 彗星の運動する軌道面に注目すれば、太陽の引力を受けた運動なので彗星の軌道は２次元運動として捉えることができる。２次元極座標を用いて彗星の位置($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$)をあらわすとき、彗星の運動エネルギー T は以下の表式で与えられることを示せ。

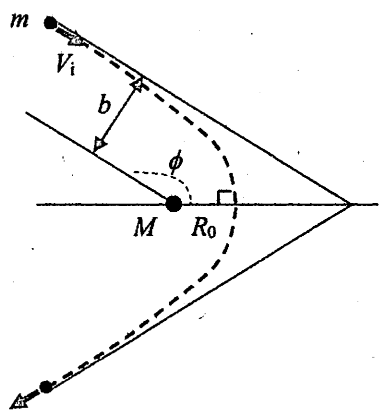
$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} \qquad (\text{ただし} h \equiv r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right))$$

(2) 太陽から任意の距離 R にある質量 m の彗星にはたらく、太陽の引力によるポテンシャルエネルギーを記せ。ただし無限遠方 $(R \to \infty)$ におけるポテンシャルエネルギーをゼロとし、万有引力定数は G とせよ。

(3) 彗星の持つ角運動量の大きさ L を求めよ。

(4) 角運動量が保存量であることを利用して、彗星が太陽に最も近づく距離における速度 V_0 を、R_0 を用いて表せ。

(5) 以上(1)〜(4)を利用して、彗星が太陽に最も近づく距離 R_0 を求めよ。ただし、角運動量 L と (1)で求めた運動エネルギー第２項 h との間には $L = mh\,(= mr^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right))$ の関係がある。



問題２（物理化学）

純水の状態図に関する以下の問いに答えよ。

（１） 純水の状態図（縦軸を圧力、横軸を温度とせよ）を描き、特徴的な点と領域の名称とそれぞれの場所の可変度を示せ。

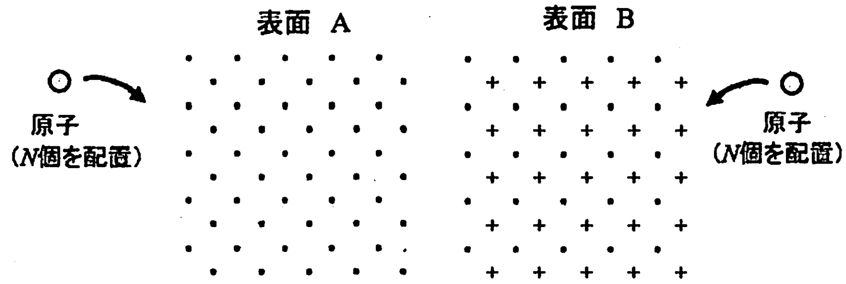
（２） 純水の 1.0 bar での融点は 273.15(270) K であり、その時の氷と水の密度はそれぞれ 0.9168(10/11)、0.9998(1.0) kg dm^{-3} である。水の溶融エンタルピー $\Delta_{fus}H^{\circ}$ は 6.0 kJ mol^{-1} である。100 bar 加圧すると融点は 何度変化するか。有効数字は2桁とせよ。下がる場合はマイナスを付けること。水の分子量は 0.018 kg mol^{-1} とせよ。計算には () 内の数値を用いて良い。

（３） 純物質の多くは、トルートンの規則（蒸発エントロピー = 85 J mol^{-1}）に従う。標準圧における純水の蒸発エンタルピーを予測せよ。計算した値より大きいか小さいかで答えよ。

（４） （３）の結果になる理由を答えよ。

問題３　（熱力学／統計力学）

下図に示す二種類の結晶表面（表面Ａと表面Ｂ）に、それぞれN個の同種原子を配置する。いずれの場合も、原子を置くことができる格子点の総数は$2N$個である。表面Ａでは全ての格子点が「格子点１」という同一の環境にある。表面Ｂには「格子点１」、「格子点２」という二つの環境が、それぞれN個ずつ存在する。これについて、以下の問いに答えよ。



	表面 A	表面 B
格子点の総数	$2N$	$2N$
格子点の構成	格子点１(•)のみ$2N$	格子点１(•)がN 格子点２(+)がN

（１）表面ＡにN個の原子を配置する。このときの、場合の数（配置数）W_Aを求めよ。

（２）W_A に対応する配置のエントロピー S_A は、ボルツマン定数 k_Bを用いて、

$$S_A = 2k_B N \ln\left(\boxed{ア}\right)$$

と表すことができる。空欄「ア」に入る数字を示せ。なお S_Aの導出に際して、W_A の階乗部分にはスターリングの公式 $x! \cong x\ln x - x$ $(x \gg 1)$ を適用した。

（３）表面Ｂの格子点１にn個の原子を配置した後、格子点２に残りの$N\text{-}n$個の原子を配置する。この一連の配置に対する場合の数（配置数）W_Bを求めよ。

（４）W_B に対応する配置のエントロピー S_B は、

$$S_B = \boxed{イ}\left\{N\ln N - \boxed{ウ} - n\ln n\right\}$$

と表すことができる。空欄「イ」と「ウ」を正しく記入せよ。なお（２）と同様に、W_B の階乗部分にはスターリングの公式 $x! \cong x\ln x - x$ $(x \gg 1)$ を適用した。

（５）S_B を最大にするnを求めよ。

（６）表面Ｂの格子点１に置かれた原子のエネルギーをE_1、格子点２に置かれた原子のエネルギーをE_2とする。（３）に示す条件で表面Ｂに配置されたN個の原子集団について、ヘルムホルツの自由エネルギーFを、E_1、E_2、N、n、k_B、および温度Tを用いて表せ。表面Ｂの上に置かれた原子間の相互作用は無視できるものとする。

問題４（電磁気学）

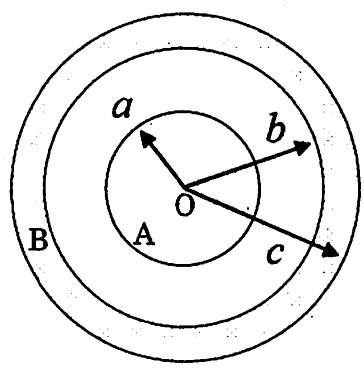
図のように半径 a の導体球Ａと、導体球殻Ｂ（内半径 b、外半径 c）が真空中に置かれている。ただし、Ａ、Ｂ共に中心はＯにあって、$a<b<c$ である。また、中心Ｏから任意の距離 r の位置に点Ｐがある。誘電率を ε_0 、無限遠点の電位 V をゼロとして以下の問いに答えよ。

（１）　球Ａにのみ電荷 Q を与える。

① 球Ａと球殻Ｂにはそれぞれ、どのような電荷が分布するか。

② 点Ｐの電場の強さ E を求めよ。

③ 点Ｐの電位 V を求めよ。



（２）　球殻Ｂにのみ電荷 Q を与える。

① 球Ａと球殻Ｂにはそれぞれ、どのような電荷が分布するか。

② 点Ｐの電場の強さ E を求めよ。

③ 点Ｐの電位 V を求めよ。

（３）　球Ａに正電荷 Q を、球殻Ｂに負電荷 $-Q$ を与える。

① 球Ａと球殻Ｂにはそれぞれ、どのような電荷が分布するか。

② 点Ｐの電場の強さ E を求めよ。

③ 点Ｐの電位 V を求めよ。

問題５（量子力学）

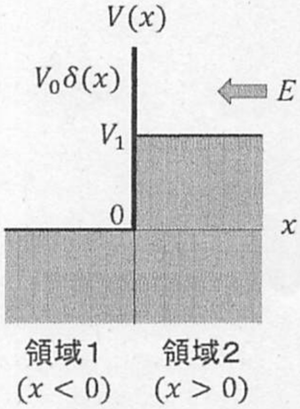
図のように、デルタ関数$\delta(x)$と階段関数$H(x)$

$$H(x) \equiv \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

とで表される一次元のポテンシャル$V(x)$

$$V(x) = V_0\delta(x) + V_1 H(x)$$

を考える。V_0とV_1は正の定数とする。このポテンシャルに、質量m、エネルギー$E\ (> V_1)$の粒子が領域２（$x > 0$）から領域１（$x < 0$）に向けて入射する場合に、以下の問いに答えよ。



（１）この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式の解を$u(x)$とする。領域２で時間を含まないシュレディンガー方程式を解いて、一般解を求めよ。また領域１での一般解を記せ。

（２）時間に依存するシュレディンガー方程式の解を$\psi(x,t)$として、１次元の確率流密度Sは以下の式で定義される。この粒子の領域１での確率流密度Sを計算せよ。

$$S(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right]$$

（３）この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式を原点を含む微小な領域$-\varepsilon$から$+\varepsilon$で積分することにより、次式が成立することを示せ。

$$\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=+\varepsilon} - \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}u(0)$$

デルタ関数$\delta(x)$が$f(x)$を任意の連続関数として以下の性質を持つことを使ってよい。

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \ne 0) \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

（４）$x = 0$での接続条件（境界条件）をすべて記せ。

（５）接続条件を解くことにより、反射率Rと透過率Tを$m, E, V_0, V_1, \hbar$で表せ。

問題６（輸送現象論）

次の文章の（１）～（２２）に文意が合うように適当な語句、単位、式、数値のいずれかを挿入せよ。但し、[　] はSI単位であり、（８）～（１１）については、0.0024, 0.024, 0.61, 6.1, 80, 400, 800, 4000の中から適当な数値を選ぶこと。

熱の輸送現象において（１）は、物質の移動を伴わずに高温側から低温側に熱エネルギーが輸送される現象であり、気体及び液体では、原子や分子の運動や衝突により、固体では、格子の振動による（２）の伝搬または（３）の運動により熱エネルギーが輸送される。y方向に温度勾配dT/dy[K/m] がある場合、y方向の熱流束q_{y}[（４）] は、次式に示す（５）の（１）法則によって記述される。

$$q_{\mathrm{y}} = \boxed{\quad (6) \quad}$$

ここで、kは熱伝導率[（７）] である。一般的な物質の室温（大気圧）付近でのkの値[（７）] は、鉄（８）、銅（９）、水（１０）、空気（１１）程度である。

一方で、固体壁とそれに沿って流れる流体との間に生じる熱エネルギーの輸送現象は（１２）と呼ばれ、温度T_{w}[K]の固体壁面からバルク温度T_{b}[K]（$< T_{\mathrm{w}}$）の流体への熱流束q_{w} [（４）] は、次の（１３）の冷却法則で表される。

$$q_{\mathrm{w}} = \boxed{\quad (14) \quad}$$

ここで、hは熱伝達係数 [（１５）] である。熱伝達係数の大きさを代表する無次元数を（１６）と呼び、伝熱面の大きさを表す流路の代表長さをl[m]とすると（１７）で定義される。乱流の強制対流の場合、（１６）は一般に、２つの無次元数（１８）及び（１９）の関数となり、それぞれ、（２０）及び（２１）で定義される。ここで、c_p、μ及びρは、それぞれ、流体の定圧比熱[J/(kg·K)]、粘性係数[（２２）] 及び密度[kg/m³]、vは流速[m/s] である。

問題 7（固体物理学）

周期的なポテンシャル場の影響を弱く受ける一次元金属結晶中の伝導電子の挙動を考える．結晶中の原子数および原子間距離をそれぞれNおよびa, 電子波のエネルギーおよび波数ベクトルをそれぞれεおよび$\boldsymbol{k}$ $(|\boldsymbol{k}| = k)$とする．伝導電子は周期境界条件を満たしながら運動しているものとする．以下の問いに答えよ．

（1） $k = \frac{\pi}{a}n$, $(n = 0, \pm1, \pm2\ \ldots)$ および $k \neq \frac{\pi}{a}n$ の電子波の振る舞いの違いについて説明せよ．

（2）電子波束の速度（群速度:$\boldsymbol{v}_g$）をεおよび波数ベクトル$\boldsymbol{k}$を用いて表せ．

（3）εと $\boldsymbol{k}$ の分散関係を第１および第２ブリユアン領域について図に示せ．

（4）（３）で求めた分散関係は，自由電子モデルから導かれる分散関係とどのように異なるか説明せよ．また，違いが現れる理由について説明せよ．

この金属結晶を一次元１価金属とし，これが結晶に平行で，かつ時間的に一様な電界$\boldsymbol{E}$中に置かれているものとする．電子の電荷を$-q(q > 0)$とする．

（5）今，電子が$\boldsymbol{E}$による力のみを受けていると仮定すると，電子波の$\boldsymbol{k}$に対する運動方程式が次式で表されることを導け．$\hbar$はプランク定数である．

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = -\frac{1}{\hbar}q\boldsymbol{E} \qquad \text{(i)}$$

（6）(i) 式は$\boldsymbol{k}$が時間と共に変化することを表しているが，電界$\boldsymbol{E}$中に置かれた金属結晶の$\boldsymbol{k}$の分布は時間に依存せずに定常状態となる．その原因について言及し，定常状態となる理由を説明せよ．

（7）１価金属に電流が流れることを説明せよ．

問題8 （原子物理学）

［1］ 慣性系 S と、S に対して x 方向に速度 v で等速運動している慣性系 S'を考える。ここで、v は光速 c に対して無視できない大きさとする。慣性系 S での位置及び時間座標を (x,y,z,t)、慣性系 S'での位置及び時間座標を (x',y',z',t') とする。以下の問いに答えよ。

(1) 慣性系 S'での位置座標及び時間座標 (x',y',z',t') を慣性系 S で測定した位置及び時間座標 (x,y,z,t) を用いて表せ。

(2) 慣性系 S'での x'方向、y'方向及び z'方向の速度 (u_x',u_y',u_z') を、慣性系 S での x 方向、y 方向及び z 方向の速度 (u_x,u_y,u_z) を用いて表せ。

［2］ 静止質量 m_0 の粒子が運動エネルギー T を持っており、この粒子の全エネルギーを E とする。以下の問いに答えよ。

(1) $E^2=(m_0c^2)^2+(pc)^2$ と表せることを示せ。なお、p は粒子の運動量、c は光速である。

(2) この粒子のド・ブロイ波長 λ を求めよ。なお、プランク定数を h とし、T、m_0 及び c を用いて表せ。

(3) ド・ブロイ波長の計算において非相対論的近似が成り立つときの条件は何か。説明せよ。またその時の波長はどのように書けるか示せ。