令和２年９月２３日

九州大学大学院工学府量子物理工学専攻
令和３年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

１．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題の、合計２題を解答すること。
（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）
１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題1（必須）

［1］

（1）行列 A に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（2） 行列 A の逆行列を求めよ。

［2］ 下記の微分及び不定積分を実行せよ。

（1） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{\tan 2x}\right)$

（2） $\displaystyle\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x$

（3） $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\,\mathrm{d}x$

［3］ 下記の微分方程式の解 $y(x)$、偏微分方程式の解 $f(x,y)$ を求めよ。

（1） $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=-2$

（2） $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-(3x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=0$

（3） $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=2 \quad (x>0, y>0)$

問題２（選択）

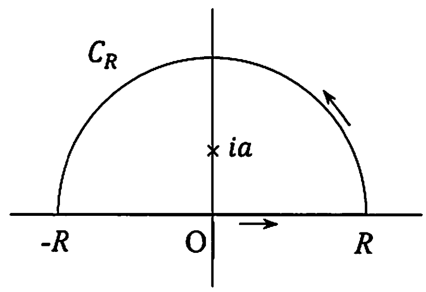
［１］複素平面上の２点$1+2i, -2-i$からの距離の比が$1:2$の全ての点$z(\in \mathbb{C})$は円を描く。その円の中心座標と半径を求め，複素平面上に描け。

［２］次の複素関数の原点におけるローラン展開を求めよ。

(1) $\frac{e^z}{z^2}(z \in \mathbb{C})$　　　(2) $\frac{1}{z(1-z)^2}(z \in \mathbb{C})$

［３］以下の実積分の式を図の複素平面における積分路と留数定理を用いて証明せよ。自明なこと以外を省略しないこと。

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (x, a \in \mathbb{R}, a > 0)$$



問題３（選択）

［１］次の問いに答えよ。

（１）次の関数$f(t)$を$-\pi \le t \le \pi$の範囲で複素フーリエ級数で展開せよ。

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \le t \le \pi)$$

（２）以下のパーセバルの等式を証明せよ。ただし、$f(t)$は積分範囲でなめらかな関数であり、c_nは複素フーリエ係数とする。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

（３）（１）（２）を用いて次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

［２］関数$f(t)$のラプラス変換を$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$とするとき、n階微分に関する次式を証明するため、以下の問いに答えよ。

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n)}f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}f(0)$$

（１） １階微分を求めよ。
（２） ２階微分を求めよ。
（３） （１）（２）の結果および数学的帰納法を用いて上記の式を証明せよ。