令和元年８月２１日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
令和２年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅠ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

１．　以下の８題を解答せよ。
（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
（配点：各題２５点、合計２００点満点）

２．　解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

３．　解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（力学）

下図のように長さ L の糸で質量 m の質点をつるし、x-y 面内で振動する振り子がある。この支点に質量 M の質点が取り付けられており、x 軸上を自由に運動できるようになっている。このとき振り子を微小振動させる場合を以下に沿って考える。ただし糸の質量は無視でき、糸と鉛直線とのなす角を θ とする。また重力加速度は g とする。

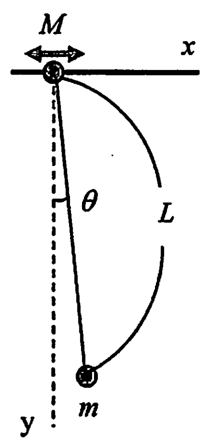
(1) 時刻 t における質量 M の質点の座標を$(x, 0)$、質量 m の質点の座標を$(x+L\sin\theta, -L\cos\theta)$とおく。それぞれの質点の運動エネルギーを求めよ。

(2) それぞれの質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。

(3) 以上よりこの系のラグランジアンを求め、それぞれの質点についてラグランジュの運動方程式を求めよ。

(4) 質点を微少角 θ_0 傾け静止させた後, 時刻 t=0 で手を離したときの角 θ の時間変化を示す式を記述せよ。ただし $\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$ と近似して良い。

(5) 上を参考に質量 M の質点の水平方向の運動を説明せよ。



問題２（物理化学）

［１］以下の反応に関する問いに答えよ。

$CuSO_4$ (s) ⇄ Cu^{2+}(aq) ＋ SO_4^{2-}(aq) …………①

反応式中の(s)は固体、(aq)は溶存状態を示す。

表　反応①の成分の 298K における熱力学データ

		Cu^{2+}(aq)	SO_4^{2-}(aq)	$CuSO_4$ (s)
標準生成エンタルピー	$\Delta_f H^\circ$ / kJ mol^{-1}	65	-910	-771
標準生成ギブズエネルギー	$\Delta_f G^\circ$ / kJ mol^{-1}	66	-745	-662
標準エントロピー	S_m° / J K^{-1} mol^{-1}	-100	20	110

（１）反応①について、標準反応エンタルピー（$\Delta_r H^\circ$）、標準反応ギブズエネルギー（$\Delta_r G^\circ$）、標準反応エントロピー（$\Delta_r S^\circ$）を求めよ。計算手順も示すこと。

（２）$CuSO_4$(s)の水への溶解度は極めて低い。温度が 298 K よりも高くなったとき $CuSO_4$(s)の水への溶解度は上がるか下がるかを、反応①の標準反応エンタルピーの符号を使って説明せよ。

［２］状態図に関する以下の問いに答えよ。

（１）　相律は次の式で示される。

$F = C - P + 2$

ここで、Fは可変度（自由度）、Cは成分の数、Pは平衡にある相の数である。

この式を証明せよ。

（２）　純物質の状態図を描き、可変度が０、１、２の場所をそれぞれ示せ。

（３）　固相／液相境界の傾き(dp/dT)を表すクラペイロンの式を、化学ポテンシャル(μ)の温度と圧力依存性の関係から求めよ。融解エンタルピー（$\Delta_{fus}H$）を用いよ。

（４）　水と氷では、氷の方が水より密度が低い。圧力が上がると氷の融点は上がるか下がるかを理由も付して示せ。

問題3　(熱力学／統計力学)

［1］熱力学の第一法則と第二法則について以下の問いに答えよ。

(1) 第一法則を$dU = d'Q - d'W$ と記述する。各項 dU, $d'Q$, $d'W$ が表す物理量を示して与式が一般に意味することを記せ。

(2) 第二法則は一般に $dS \geq d'Q/T$ で表すことができる。ただし、Tは温度、Sはエントロピーである。系の状態が $d'Q$=0 で変化していくときに、この法則に従って熱平衡状態に至る過程を述べよ。

(3) 系の微視的な状態がエルゴードの仮説を満足しているものとする。エルゴードの仮説について簡単に説明して、微視的状態の数Ωと Sの関係を記せ。

(4) 系がある温度 Tで一定圧力 pの下に置かれている。系の状態変化が体積 Vの変化を伴う場合と、Vの変化が無視できる場合のそれぞれについて、熱平衡状態が満足すべき条件を第一法則と第二法則から導け。

［2］ある純物質Ａは温度 Tと圧力 pに依存して、気体、液体と結晶構造が異なる２種類の固体の相（αとβ）の合計４種類の相状態をとる。定温、定圧で２種類の相の間での微小な物質の出入りを考えて、異なる相が互いに平衡であるときの条件を導け。さらに、この物質の熱平衡状態において上記の４種類の相が共存することがあり得るかを論ぜよ。必要ならば i 相のギブス・エネルギーを G_i, i 相中の物質Ａの化学ポテンシャルをμ_iとせよ。

問題４（電磁気学）

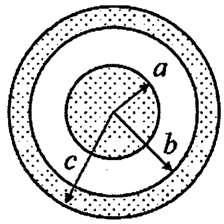
［１］　xy 座標原点に点電荷＋Q [C]がある。誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

（１）　原点から距離 r [m] 離れた位置の電場の強さ E を求めよ。

（２）　２点 A と B が x 軸上の（r_A,0）と（r_B,0）にあるとき、２点間の電位差を示せ。ただし、$0<r_A<r_B$ とする。

（３）　原点の電荷に加えて座標（$2r$,0）に点電荷＋Q を置くとき、座標(r,d)における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の大きさと向きを示せ。ただし $0<d$ とする。

［２］　右のような断面図を持った同軸導体がある。内側導体は半径 a [m]の円柱状、外側は内径 b [m]、外径 c [m]の円筒状である。電流 I [A]が各導体内を一様に流れており、その向きは内外の導体で互いに逆向きとなっている。中心軸からの距離 r における磁場 B の大きさを求めよ。ただし r の条件は、（１）$a<r<b$　（２）$b<r<c$（３）$c<r$ であり、透磁率はμ_0とする。



問題５（量子力学）

１次元の調和振動子ポテンシャル中の質量mの粒子のハミルトニアン$\hat{H}$は以下で与えられる。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

ただし演算子$\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$は、運動量演算子$\hat{p}$を用いて次式で定義される。

$$\hat{a} \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$がエルミート演算子であるかどうかを理由とともに答えよ。

(2) 交換関係について考える。

(a) $[x, \hat{p}]$　を計算せよ。

(b) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$　を示せ。

(3) 演算子$\hat{N}$を$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$と定義する。$\hat{N}$の固有関数を$u_n(x)$、固有値を$n$、すなわち

$$\hat{N} u_n(x) = n u_n(x)$$

とする。$\hat{a}^\dagger u_n(x)$も$\hat{N}$の固有関数であることを示せ。またその固有値を求めよ。

(4) １次元の調和振動子の基底状態の規格化された固有関数$u_0(x)$は以下で与えられる。

$$u_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}$$

第１励起状態の固有関数$u_1(x)$を求めよ。規格化せずに解答してよい。

(5) 基底状態と第１励起状態の波動関数の概形をそれぞれ図示せよ。また基底状態と第１励起状態における粒子の存在確率の概形をそれぞれ図示せよ。

問題６（輸送現象論）

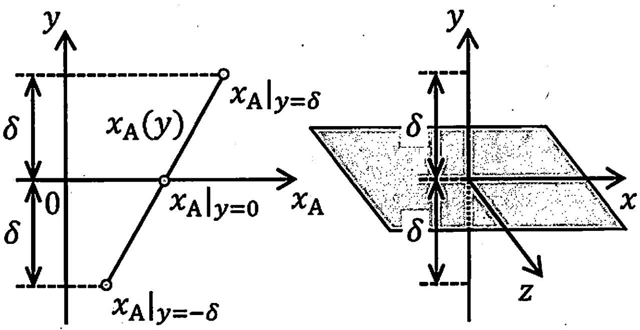
次の文章の(1)～(14)に、文意が合う様に適当な語句、単位、式等のいずれかを挿入せよ。

ＡとＢの２成分からなるモル濃度cの混合流体中でモル分率x_Aの成分Ａがy方向に濃度勾配$\mathrm{d}x_\mathrm{A}/\mathrm{d}y$を持つ場合、成分Ａは$y$方向に高い濃度の方から低い濃度の方に輸送される。＿(1)＿の拡散法則と呼ばれる物質輸送に関する基本法則では、成分Ａのモル流束$j_{\mathrm{A},y}$は、＿(2)＿と呼ばれる輸送物性D_ABを用い

$$j_{\mathrm{A},y} = \underline{\quad(3)\quad} \tag{a}$$

と表される。ここで、$j_{\mathrm{A},y}$及びD_ABのSI単位は、それぞれ、＿(4)＿及び＿(5)＿である。

成分A, B２種類の分子からなる熱平衡にある低圧の混合気体中の輸送現象を気体分子の運動論と関係付けて、その物理的意味を考える。ここでは、簡単化のため、２種類の気体は、分子１個が同じ質量m、直径dを持つものとする。図に示すように、成分Ａがy方向に濃度分布$x_\mathrm{A}(y)$を持つ場合を考える。ここでは、気体分子は$y = 0$でy軸に垂直な面（$y = 0$面）からδだけ離れた場所で他の分子と衝突して$y = 0$面に到達するものとし、$y = \delta$及び$y = -\delta$にある気体分子の濃度を、それぞれ、$x_\mathrm{A}|_{y=\delta}$及び$x_\mathrm{A}|_{y=-\delta}$とおく。



$y = 0$面を通じた気体分子の相互作用により、成分Ａの高い濃度の領域から低い濃度の領域へ成分Ａが運ばれ、$y = 0$面の上下にある領域では、成分Ａの濃度の差が小さくなる。$y = 0$面を通じて単位面積、単位時間当たりに交換される成分Ａの物質量が$j_{\mathrm{A},y}$になるので、アボガドロ数N、$x_\mathrm{A}|_{y=\delta}$、$x_\mathrm{A}|_{y=-\delta}$及び$y$軸に垂直な面を単位面積、単位時間当たりに通過する分子数Zを用いてこれを表すと

$$j_{\mathrm{A},y} = \underline{\quad(6)\quad} \tag{b}$$

となる。また、y方向の$-\delta$～δの間で濃度分布が直線で近似できる場合、$x_\mathrm{A}|_{y=\delta}$及び$x_\mathrm{A}|_{y=-\delta}$を$x_\mathrm{A}|_{y=0}$とその勾配$(\mathrm{d}x_\mathrm{A}/\mathrm{d}y)|_{y=0}$を用いて表すと、それぞれ

$$x_\mathrm{A}|_{y=\delta} = \underline{\quad(7)\quad} \qquad \text{及び} \qquad x_\mathrm{A}|_{y=-\delta} = \underline{\quad(8)\quad}$$

となる。これらを用いて式(b)を整理すると、$j_{\mathrm{A},y}$と$(\mathrm{d}x_\mathrm{A}/\mathrm{d}y)|_{y=0}$の間に

$$j_{\mathrm{A},y} = \underline{\quad(9)\quad} \tag{c}$$

の関係を得る。従って、式(a)と(c)を比較し、気体分子運動論から得られる関係式$\delta = 2\lambda/3$、$Z = n\bar{u}/4$（λは気体分子の平均自由行程、nは気体の分子数密度、$\bar{u}$は気体分子の平均速度）を用い、D_ABをλと$\bar{u}$で表すと

$$D_\mathrm{AB} = \underline{\quad(10)\quad}$$

の関係を得る。さらに、理想気体に対して、$\lambda = 1/(\sqrt{2}\pi n d^2)$、$\bar{u} = \sqrt{8k_\mathrm{B}T/(\pi m)}$、$p =$＿(11)＿（$p$は圧力、$k_\mathrm{B}$はボルツマン定数、$T$は絶対温度）の関係を用いると、$D_\mathrm{AB}$は圧力の＿(12)＿乗、分子量の＿(13)＿乗、絶対温度の＿(14)＿乗に比例することになる。

問題7（固体物理学）

［1］金属中の自由電子（質量 m）が一辺Lの立方体（原子数 N）中を次式で表される波動関数 ϕ

$$\phi(x,y,z) = A\exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)\}$$

に従って，周期境界条件を満足しながら運動している．$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$は波数ベクトル，$A$は定数である．この場合，$\boldsymbol{k}$は，$(k_x, k_y, k_z) =$（ ① ）で与えられる離散値を取る．ここで，$n_s = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, s = x, y, z$である．電子波のエネルギー$\varepsilon$は$\boldsymbol{k}$を用いて$\varepsilon =$ （ ② ）で表される．また，1つの電子波の量子状態が$\boldsymbol{k}$空間中で占有する体積は（ ③ ）である．

1つの電子波の速度$\boldsymbol{v}$はプランクの定数$\hbar$と$\boldsymbol{k}$を用いて，$\boldsymbol{v} =$ （ ④ ）で与えられる．温度$T = 0$ (K)における$\boldsymbol{v}$の分布をv_x, v_y, v_zを軸とする速度空間で表すと，$\boldsymbol{v}$は原点を中心とする半径v_Fの球中に離散的にかつ一様に分布する．ここでv_Fは（ ⑤ ）速度と呼ばれるものである．また，その電子波のエネルギーε_Fは，その時の波数$\boldsymbol{k_F} = (k_{Fx}, k_{Fy}, k_{Fz})$を用いて$\varepsilon_F =$（ ⑥ ）で表せる．金属に外部から電界を印加していない状態では，$\boldsymbol{v}$の平均値は，$<\boldsymbol{v}>=$（ ⑦ ）となる．

次に，時刻 $t = 0$の時にx軸の正の方向に電界 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$を金属に与える．この時，自由電子には(a)$\boldsymbol{E}$による力と，(b)速度に比例する抵抗力が働くものとする．自由電子の速度は，電荷を$-q$ ($q > 0$)，抵抗力の比例定数をc ($c > 0$)として，自由電子の運動方程式を解くことによって求めることができる．十分に時間が経った時，すなわち定常状態での自由電子の速度ベクトルの平均値を$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$とすると，$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$は（ ⑧ ）と呼ばれるものであり，上述の $<\boldsymbol{v}>=$（ ⑦ ）とは異なる値を取ることが導ける．$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を用いて，金属中の自由電子がオームの法則を満足していることを説明することができる．

(1) 文章中の（ ① ）～（ ⑧ ）に適切な語句または数式を答えよ．

(2) 電子波の取り得る量子状態を$\boldsymbol{k}$空間で図示せよ．図中には$\boldsymbol{k_F} = (k_{Fx}, k_{Fy}, k_{Fz})$を示すこと．

(3) 下線部(b)が生じる理由を説明せよ．

(4) 自由電子に下線部(a)および(b)の力が働いているものとして，s 番目の自由電子の運動方程式を記述せよ．また，これを解いて$\boldsymbol{v}_s(t)$を求めよ．ただし，時刻 t=0 の時，$\boldsymbol{v}_s(0) = 0$とする．

(5) $\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を求めよ．

(6) 金属中の電流密度 $\boldsymbol{j}$ (C·m^{-2}·s^{-1}) を$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を用いて表し，オームの法則が満足されていることを示せ．ただし，自由電子密度をn (m^{-3})とする．

問題８（原子物理学）

［１］ある金属を波長λ_0の光で照射すると、運動エネルギーEの電子が放出された。照射する光の波長を連続的に変化させたところ、波長がλ_1より長くなると電子の放出が観測されなくなった。この結果からλ_0、λ_1、Eおよび真空中の光速度cを用いてプランク定数を表す式を記せ。

［２］水素原子中の電子は量子数nに対応したエネルギーでのみ定常状態を取る。$n=1$のエネルギー準位を基底状態と呼び、基底状態の水素原子の電離に必要なエネルギーをE_1とする。今、基底状態の水素原子に電子を衝突させたところ、$n=3$のエネルギー準位に励起したのち、光を放射して、$n=2$のエネルギー準位に遷移した。このとき電子衝突で水素原子に移行したエネルギーをE_1を用いて示せ。また、放出された光の波長をE_1、プランク定数h、真空中の光速度cを用いて表せ。

［３］エネルギーE_0のガンマ線が自由電子と弾性衝突して入射方向に対して180°方向に散乱され、エネルギーE'になった。電子の静止質量をm_e、真空中の光速度をc、反跳電子の運動エネルギーと運動量の大きさをそれぞれTおよびpとして以下の問いに答えよ。

(1) $T+m_ec^2=\sqrt{(cp)^2+(m_ec^2)^2}$の関係式が成り立つことを示せ。

(2) エネルギー保存と運動量保存の式を記せ。

(3) 散乱光子のエネルギーE'と反跳電子の運動エネルギーTをE_0、m_eおよびcを用いて表せ。

令和元年８月２１日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
令和２年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅡ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

１．　以下のうちからあらかじめ届け出た３題を解答せよ。また、当専攻を志望する理由についての小作文を作成せよ。
（力学，物理化学，熱力学／統計力学，電磁気学，量子力学，輸送現象論，固体物理学，原子物理学，電気・電子回路）
（配点：各題５０点、合計２００点満点）

２．　解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

３．　解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題１（力学）

[1] 図１のように長さ L の糸で質量 m の質点をつるし、x-y 面内で振動する振り子がある。この支点に質量 M の質点が取り付けられており、x 軸上を自由に運動できるようになっている。このとき振り子を微小振動させる場合を以下に沿って考える。ただし糸の質量は無視でき、糸と鉛直線とのなす角を θ とする。また重力加速度は g とする。

(1) 時刻 t における質量 M の質点の座標を $(x, 0)$、質量 m の質点の座標を $(x+L\sin\theta, -L\cos\theta)$ とおく。それぞれの質点の運動エネルギーを求めよ。

(2) それぞれの質点のポテンシャルエネルギーを求めよ。

(3) 以上よりこの系のラグランジアンを求め、それぞれの質点についてラグランジュの運動方程式を求めよ。

(4) 質点を微少角 θ_0 傾け静止させた後, 時刻 $t=0$ で手を離したときの角 θ の時間変化を示す式を記述せよ。ただし $\sin\theta \approx \theta$、$\cos\theta \approx 1$ と近似して良い。

(5) 上を参考に質量 M の質点の水平方向の運動を説明せよ。

[2] 質量 M, 長さ $2L$ の一様な棒がある。以下の問いに答えよ。

(1) この棒に対する重心まわりの慣性モーメントを求めよ。

図２に示すようにこの棒の一端を水平で粗い板の上に置き、鉛直と α の角をなすように手で支えた後、これを静かに離したときの運動を考える。ただし、棒を支える点Ａの位置は手を離した後も変化しなかった。以下の問いに答えよ。

(2) 点Ａを支点とする回転運動を考えるとき、棒の慣性モーメントを求めよ。

(3) 鉛直と棒のなす角度が θ $(\alpha \leqq \theta < \pi/2)$ のとき、角度 θ における棒の角速度を求めよ。

(4) 棒が板に接触する際の棒の上端部の速さを求めよ。

図１

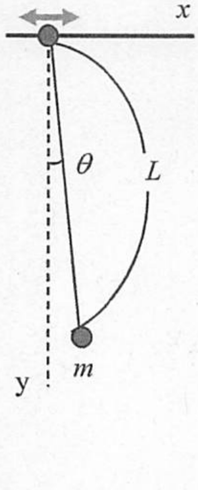
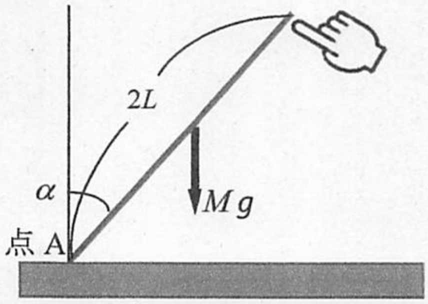


図２



問題4（電磁気学）

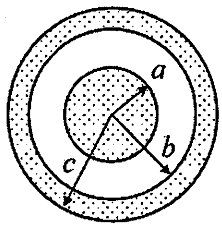
［1］　xy 座標原点に点電荷 $+Q$ [C]がある。誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

（1）　原点から距離 r [m] 離れた位置の電場の強さ E を求めよ。

（2）　2点AとBが x 軸上の（r_A,0）と（r_B,0）にあるとき、2点間の電位差を示せ。ただし、$0<r_A<r_B$ とする。

（3）　原点の電荷に加えて座標（$2r$,0）に点電荷 $+Q$ を置くとき、座標(r,d)における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の大きさと向きを示せ。ただし $0<d$ とする。

［2］　右のような断面図を持った同軸導体がある。内側導体は半径 a [m]の円柱状、外側は内径 b [m]、外径 c [m]の円筒状である。電流 I [A]が各導体内を一様に流れており、その向きは内外の導体で互いに逆向きとなっている。中心軸からの距離 r における磁場 B の大きさを求めよ。ただし r の条件は、（1）$a<r<b$　（2）$b<r<c$（3）$c<r$ であり、透磁率は μ_0 とする。

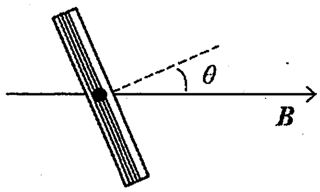


［3］　図のように長方形のコイル（面積 S、巻数 N、抵抗 R）が一様磁場 B の中で磁場に垂直な軸の周りに回転できる。コイルの中心軸と磁場の間の角を θ とする。

（1）　コイルが角速度 ω で回転するときの起電力 e を求めよ。

（2）　コイルが $\theta=0$ から $\theta=\pi$ まで回転するときに移動する電荷量を求めよ。

（3）　コイルを貫く磁束がゼロから ϕ まで増加するときに流れる電荷量を求めよ。



問題５（量子力学）

［１］１次元の調和振動子ポテンシャル中の質量mの粒子のハミルトニアン$\hat{H}$は以下で与えられる。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

ただし演算子$\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$は、運動量演算子$\hat{p}$を用いて次式で定義される。

$$\hat{a} \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\hat{a}$と$\hat{a}^\dagger$がエルミート演算子であるかどうかを理由とともに答えよ。

(2) 交換関係について考える。

(a) $[x, \hat{p}]$　を計算せよ。

(b) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$　を示せ。

(3) 演算子$\hat{N}$を$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$と定義する。$\hat{N}$の固有関数を$u_n(x)$、固有値を$n$、すなわち

$$\hat{N}u_n(x) = nu_n(x)$$

とする。$\hat{a}^\dagger u_n(x)$も$\hat{N}$の固有関数であることを示せ。またその固有値を求めよ。

(4) １次元の調和振動子の基底状態の規格化された固有関数$u_0(x)$は以下で与えられる。

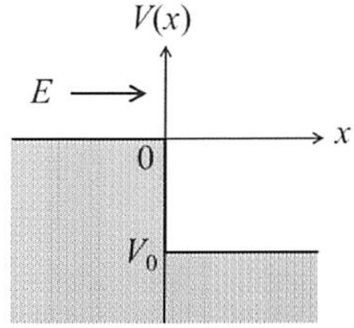
$$u_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}$$

第１励起状態の固有関数$u_1(x)$を求めよ。規格化せずに解答してよい。

(5) 基底状態と第１励起状態の波動関数の概形をそれぞれ図示せよ。また基底状態と第１励起状態における粒子の存在確率の概形をそれぞれ図示せよ。

［２］下記の１次元の階段型ポテンシャル$V(x)$を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (\text{領域１：} x < 0) \\ V_0 & (\text{領域２：} x \geq 0) \end{cases}$$



質量m、エネルギー$E\ (> 0)$の粒子が$x < 0$の領域（領域 1）から$x \geq 0$の領域（領域 2）に向けて入射する場合について以下の問いに答えよ。ただし$V_0 < 0$とする。

(1) 領域１と領域２のそれぞれにおける時間を含まないシュレディンガー方程式を記せ。

(2) (1)の一般解を求めよ。

(3) 境界条件をすべて記せ。

(4) 領域２での確率流密度Sを計算せよ。

(5) 反射率Rと透過率Tを$m, E, V_0, \hbar$のうち必要なものを使って表せ。

問題 7（固体物理学）

［1］金属中の自由電子(質量 m)が一辺Lの立方体(原子数 N)中を次式で表される波動関数 ϕ

$$\phi(x,y,z) = A\exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)\}$$

に従って，周期境界条件を満足しながら運動している．$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$は波数ベクトル，$A$は定数である．この場合，$\boldsymbol{k}$は，$(k_x, k_y, k_z) =$（ ① ）で与えられる離散値を取る．ここで，$n_s = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, s = x, y, z$である．電子波のエネルギー$\varepsilon$は$\boldsymbol{k}$を用いて$\varepsilon =$ （ ② ）で表される．また，1つの電子波の量子状態が$\boldsymbol{k}$空間中で占有する体積は（ ③ ）である．

1つの電子波の速度$\boldsymbol{v}$はプランクの定数$\hbar$と$\boldsymbol{k}$を用いて，$\boldsymbol{v}$ = （ ④ ）で与えられる．温度$T = 0$ (K)における$\boldsymbol{v}$の分布をv_x, v_y, v_zを軸とする速度空間で表すと，$\boldsymbol{v}$は原点を中心とする半径v_Fの球中に離散的にかつ一様に分布する．ここでv_Fは（ ⑤ ）速度と呼ばれるものである．また，その電子波のエネルギーε_Fは，その時の波数$\boldsymbol{k}_F = (k_{Fx}, k_{Fy}, k_{Fz})$を用いて$\varepsilon_F =$（ ⑥ ）で表せる．金属に外部から電界を印加していない状態では，$\boldsymbol{v}$の平均値は，$<\boldsymbol{v}>=$（ ⑦ ）となる．

次に，時刻 $t = 0$の時にx軸の正の方向に電界 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$を金属に与える． この時，自由電子には(a)$\boldsymbol{E}$による力と，(b)速度に比例する抵抗力が働くものとする．自由電子の速度は，電荷を$-q$ ($q > 0$)，抵抗力の比例定数をc ($c > 0$)として，自由電子の運動方程式を解くことによって求めることができる．十分に時間が経った時，すなわち定常状態での自由電子の速度ベクトルの平均値を$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$とすると，$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$は（ ⑧ ）と呼ばれるものであり，上述の $<\boldsymbol{v}>=$（ ⑦ ）とは異なる値を取ることが導ける．$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を用いて，金属中の自由電子がオームの法則を満足していることを説明することができる．

(1) 文章中の（ ① ）～（ ⑧ ）に適切な語句または数式を答えよ．

(2) 電子波の取り得る量子状態を$\boldsymbol{k}$空間で図示せよ．図中には$\boldsymbol{k}_F = (k_{Fx}, k_{Fy}, k_{Fz})$を示すこと．

(3) 下線部(b)が生じる理由を説明せよ．

(4) 自由電子に下線部(a)および(b)の力が働いているものとして，s 番目の自由電子の運動方程式を記述せよ．また，これを解いて$\boldsymbol{v}_s(t)$を求めよ．ただし，時刻 t=0 の時，$\boldsymbol{v}_s(0) = 0$とする．

(5) $\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を求めよ．

(6) 金属中の電流密度 j ($\mathrm{C \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$) を$\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$を用いて表し，オームの法則が満足されていることを示せ．ただし，自由電子密度をn ($\mathrm{m^{-3}}$)とする．

［2］ 金属中の自由電子密度nを，フェルミ・ディラック分布関数$f(\varepsilon)$および状態密度関数$g(\varepsilon)$を用いて表すことを考える．結晶は一辺 L の立方体で原子数 N の 1 価金属とする．εを電子波のエネルギー，ε_Fをフェルミエネルギーとする．また，第1ブリユアン領域の形状を球形と仮定する．

(1) $f(\varepsilon)$および$g(\varepsilon)$は何を意味する関数であるか，簡単に説明せよ．

(2) $f(\varepsilon)$とεの関係を温度$T = 0$ (K)と$T = T_1$ (K)，（ただし $T_1 > 0$ (K)） の場合について図示し，どのような違いが現れるかを説明せよ．

(3) $g(\varepsilon)$を導出せよ．

(4) nを$f(\varepsilon)$および$g(\varepsilon)$を用いて表し，$T = 0$ (K)の場合のnとε_Fの関係を表す式を導け．

問題９（電気・電子回路）

[1] 図１の回路について、以下の問いに答えよ。交流電源の角周波数は ω であり、電圧 v_0、v_1、v_2、電流 i_1、i_2 はフェーザ表示（複素表示）で表記されているものとする。

（1）v_1 および v_2 を i_1 と i_2 の関数として表せ。負荷 R_2 に依存しない関係式を示すこと。

（2）電源から変圧器と負荷 R_2 を込みで見たときの入力インピーダンスを求めよ。

（3）この変圧器を n:1 の理想変圧器として扱うには 3 つの条件を満たすことが必要十分である。一つはインダクタンスが極めて大きいことであるが、残りの 2 つはいかなる条件か。満たすべき条件式を求めよ。

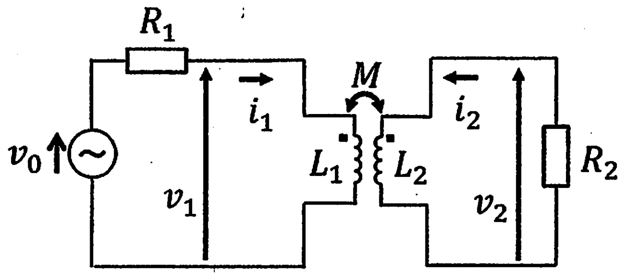


図１

[2] 図２の回路において、時刻 $t = 0$ でスイッチ SW 1 を OFF から ON に切り替え保持し、ついで時刻 $t = t_\mathrm{L}$ でスイッチ SW 2 を OFF から ON に切り替え保持した。キャパシタの電荷は $t < 0$ において 0 [C] であった。このとき以下の問いに答えよ。オペアンプの入力インピーダンスは ∞ [Ω]、出力インピーダンスは 0 [Ω] とする。オペアンプの最大出力電圧、最大出力電流は考慮しなくて良い。

（1）破線で囲んだ部分と等価となる一つの定電圧源と一つの抵抗からなる回路図を書き、電源電圧値と抵抗値を図に書き入れよ。

（2）理想的オペアンプ（$A \to \infty$ の場合）について、バーチャル・グラウンドの性質を利用して $t > 0$ におけるオペアンプ出力電圧 $V_\mathrm{out}(t)$ および出力電流 $I_\mathrm{out}(t)$ を求めよ。

（3）オペアンプのオープンループゲイン A が有限値の場合について、$t > 0$ におけるオペアンプ出力電圧 $V_\mathrm{out}(t)$ および出力電流 $I_\mathrm{out}(t)$ を求めよ。

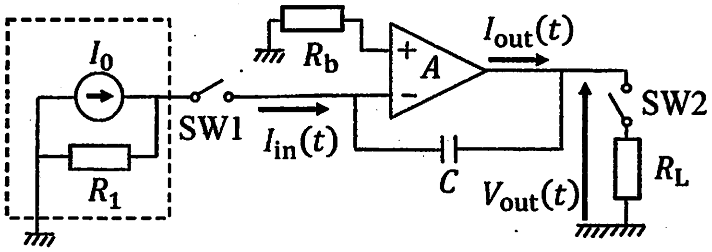


図２

問題１０（小作文）

エネルギー量子工学専攻を志望する理由について、その経緯、入学後にしたい研究や勉強、修了後の進路希望などを含めて、１０００字程度で説明しなさい。

なお、作文には升目の用紙を使用すること。