令和元年８月２１日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
令和２年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００～１０：３０

１．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題の、合計２題を解答すること。

（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（必須）

[１]　(1) 行列 A に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

(2) 行列式 B を因数分解せよ。

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ b & x & b & b \\ c & c & x & c \end{vmatrix}$$

[２]　下記の不定積分を実行せよ。

(1) $\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

[３]　下記の微分方程式の解を求めよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2e^x y^3$

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x(1+x^2)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+4y=\sin 2x$

問題２（選択）

[１] zを複素数とするとき、$z^2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$の根を示せ。

[２] 複素数zの関数$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$の$z = 1$におけるローラン展開を求めよ。ただし、$|z-1| < 1$とする。

[３] 複素数zの関数$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$の特異点は何位の極か、また特異点における留数を求めよ。

[４] 留数定理を用いて実変数xで定義された次の実積分Iを計算せよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} \mathrm{d}x$$

問題３（選択）

関数$f(x)$のフーリエ変換を$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x$　とし（x, ωは実数、iは虚数単位)、ラプラス変換を $\mathcal{L}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx} \mathrm{d}x$ とする（sは複素数)。

［１］ 以下の関数のフーリエ変換を求めよ。

(1) $f(x) = e^{-\sqrt{2}a|x|}$　$(a > 0)$

(2) $g(x) = \begin{cases} 2 & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$

［２］ ラプラス変換における以下の関係式を導け。

(1) $\mathcal{L}\left[\ \int_0^x f(x-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\ \right](s) = \mathcal{L}[f(x)](s)\ \ \mathcal{L}[g(x)](s)$

(2) $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$

(3) $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$