平成３０年８月２０日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
平成３１年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプＩ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

１．　以下の８題を解答せよ。
（力学、物理化学、熱力学／統計力学、電磁気学、量子力学、輸送現象論、固体物理学、原子物理学）
（配点：各題２５点、合計２００点満点）

２．　解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

３．　解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（力学）

[１] 質量M, 長さLの一様でまっすぐな細い棒がある。この棒の上端Pを水平な固定軸のまわりに自由に回転できるようにして、棒を鉛直面内で運動させた。重力加速度はgとして以下の問いに答えよ。

(1) Pを通る固定軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(2) 図１に示すように棒を鉛直方向から角度θ_0だけ傾け静かに離す。棒が鉛直となす角度をθとして、この振動に対する固定軸まわりの運動方程式を記述せよ。

(3) 運動が微小振動としてθの時間変化を示せ。

(4) この棒の下端に大きさを無視できる質量Mの質点を取り付け棒を微小振動させるとき、振動の周期はどのように変化するか答えよ。

(5) 下端に取り付けた質点を取り外し、図２に示すように振動が止まった状態で棒に初期角速度ω_0を与え、点Pのまわりに回転させる。角度θにおける角速度ωを求めよ。

(6) この棒が同じ方向に回転を続けるときのω_0がみたす条件を示せ。

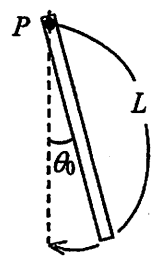


図１

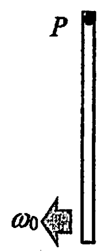


図２

問題２（物理化学）

【１】以下の反応に関する問いに答えよ。

$Ag(s) + 1/2Cl_2(g) \rightleftarrows AgCl\ (s)$ …………①

$AgCl\ (s) \rightleftarrows Ag^+(aq) + Cl^-(aq)$ …………②

反応式中の(g) は気体、(s)は固体、(aq)は溶存状態を示す。

表　反応①と②の成分の 298K における熱力学データ

	Ag(s)	Ag$^+$ (aq)	Cl$_2$ (g)	Cl$^-$(aq)	AgCl(s)
標準生成エンタルピー $\Delta_f H^\circ$ / kJ mol^{-1}	0	106	0	−167	−127
標準生成ギブズエネルギー $\Delta_f G^\circ$ / kJ mol^{-1}	0	77	0	−131	−110
標準エントロピー S_m° / J K^{-1} mol^{-1}	43	73	223	57	96

（１）反応①と反応②のそれぞれについて、標準反応エンタルピー ($\Delta_r H^\circ$)、標準反応ギブズエネルギー ($\Delta_r G^\circ$)、標準反応エントロピー ($\Delta_r S^\circ$) を求めよ。計算手順も示すこと。

（２）AgCl (s)の水への溶解度は極めて低い。温度が 298 K よりも高くなったとき、AgCl (s)の水への溶解度は上がるか下がるか、反応②の標準反応エンタルピーの符号を使って説明せよ。

【２】容器が容積の等しい２室に仕切られ、それぞれに理想気体 A もしくは B が入っている。仕切りを静かに除いたとき、以下の条件での混合のエントロピーを求めよ。なお、温度変化はないとし、気体定数 R と自然対数 ln を用いて解答すること。

（１）　一方の室には 3.0 mol の A、他方の室には 1.0 mol の B が入っていた場合。

（２）　一方の室には 3.0 mol の A、他方の室には 1.0 mol の A が入っていた場合。

（３）　一方の室には 3.0 mol の A、他方の室は真空であった場合。

問題３　（熱力学／統計力学）

熱浴に接して真空内におかれた N 個の原子からなる純金属の固体結晶を考える。結晶構造はこの金属が固体である限りにおいて変化しない。この金属の原子配置構造に関する以下の設問に答えよ。

（１）欠陥を一切含まない理想的な結晶状態での原子のエネルギー準位を ε_s とする。この状態での原子配置構造に関する自由エネルギーを記せ。但し、表面の存在は無視してよい。

（２）一般に有限の温度 T では（１）で考えた理想的な結晶状態ではなく、構造が乱れた格子欠陥が存在する。今、格子欠陥として n 個の点欠陥が結晶の内部にできているとする。点欠陥は単純に原子が $\varepsilon_s+\Delta\varepsilon$（ただし、$\Delta\varepsilon>0$）のエネルギー準位に励起した状態であるとみなして、このときの微視的状態の数 Ω_s を求めよ。

（３）点欠陥は結晶格子点上を自由に動けるものとする。温度 T での熱平衡状態における点欠陥の濃度 n/N を導け。ただし、$N \gg n \gg 1$ であり、点欠陥同士に相互作用は働かない。

（４）この金属の ε_s と $\Delta\varepsilon$ の値は、ε_s=5.00 eV, $\Delta\varepsilon$=1.50 eV であった。600 ℃における点欠陥の熱平衡濃度 n/N の値を、下表の指数関数の値と有効数字の範囲での Taylor 展開によって求めよ。ただし、ボルツマン定数は $k_B=1.38\times10^{-23}$ J/K、電気素量は $e=1.60\times10^{-19}$ C である。

x	-1	-5	-10	-20	-30	-40	-50
e^x	0.368	6.74×10^{-3}	4.54×10^{-5}	2.06×10^{-9}	9.36×10^{-14}	4.25×10^{-18}	1.93×10^{-22}

問題４（電磁気学）

［1］　真空中の静電場に関する以下の問いに答えよ。誘電率は ε_0 とする。

（1）　静電場 $\boldsymbol{E}$ のガウスの法則（積分形）を示せ。

（2）　前問の積分形の式から微分形の式を導け。

（3）　無限に長くて細い直線状帯電体がある。線電荷密度が λ であるとき、帯電体から距離 d の位置における電場の強さ E を求めよ。この際ガウス閉曲面を明示してガウスの法則を用いる事。

（4）　細い針金で作った半径 r の円形コイルに電荷 Q を与える。円形コイルの中心軸上にあってコイル中心から距離 h の点 P における電位 V および電場の強さを求めたい。無限遠での電位をゼロとして以下の問いに答えよ。

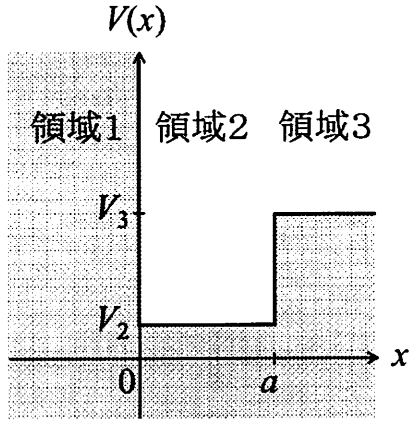
(a) コイル上の微小線分 $\mathrm{d}\ell$ の電荷によって点 P に生じる電位を求めよ。

(b) コイル全体の電荷によって点 P に生じる電位を求めよ。

(c) 点 P の電場の強さを求めよ。

問題5（量子力学）　問題

図のような一次元のポテンシャル$V(x)$中の質量m、エネルギーEの粒子の束縛状態について考える。$V_2 < E < V_3$とする。



$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \quad \text{：領域１}) \\ V_2 & (0 \le x \le a \quad \text{：領域２}) \\ V_3 & (x > a \quad \text{：領域３}) \end{cases}$$

この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$$

の領域１, ２, ３での解を$u_1(x), u_2(x), u_3(x)$とする。$u_2(x)$と$u_3(x)$の一般解はA, B, C, Dを未定係数として以下のように表される。

$$u_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}$$
$$u_3(x) = Ce^{\kappa_3x} + De^{-\kappa_3x}$$

（１）$u_1(x)$を記せ。

（２）境界条件をすべて記せ。また$u_2(x)$と$u_3(x)$を未定係数B, C, Dを使わずに表せ。

（３）k_2とκ_3を、$m, \hbar, E, V_2, V_3, a$のうち必要なものを使って表せ。

（４）$k_2a \equiv \xi$, $\kappa_3a \equiv \eta$と定義して、(3)の結果からξとηの間に成り立つ関係を導け。また境界条件からξとηの間に成り立つ関係を導け。これらの関係を考慮して、束縛状態の解が２個以上存在するためにはV_3がV_2よりどれだけ大きい必要があるかを求めよ。

（５）最もエネルギーの低い状態とその次にエネルギーの低い状態での$u(x)$の概形をそれぞれ図示せよ。

問題６（輸送現象論）

平板に沿って粘性流体が流れる時、平板の前縁から下流に向かって境界層が発達し、壁面では摩擦抗力が働く。このとき、壁面に働くせん断応力τ_wは、流体の密度ρ、粘性係数μ、主流の速度u_∞及び前縁からの距離xによって支配されるものとする。以下の問いに答えよ。

（１） τ_w及びこれら支配する４つの因子（ρ、μ、u_∞及びx）の次元を基本次元を用いて表せ。但し、基本次元の記号は、長さをL、質量をM、時間をTとする。

（２）次元解析を用いてτ_w及びこれらを支配する因子を独立な無次元量の形で表すとき、無次元量の個数が２つとなることをバッキンガムのπ定理を用いて説明せよ。

（３） τ_wが各因子の累乗積として与えられるとき、τ_wを動圧で除した無次元量（摩擦係数C_f）はどのような無次元量の関数となるか、次式を用いた次元解析から導出せよ。

$$\tau_w = K(\rho)^a(\mu)^b(u_\infty)^c(x)^d$$

ここで、Kは無次元の係数、a~dは未知の指数である。

（４） C_fが依存する無次元量の物理的な意味について簡単に説明せよ。

問題７（固体物理学）

固体の定積モル比熱 C_v について，以下の問いに答えよ．
アインシュタインは，１モルの固体結晶（原子数 N_0）の格子振動を，同一の振動数 ν_E を持つ $3N_0$ 個の（ ① ）の集りと見なし，（ ① ）のエネルギー準位(ε_n)を量子仮説に基づいて，零点振動を考慮して ε_n =（ ② ）と表わした．彼は ε_n の分布がマクスウェル・ボルツマン分布に従うと仮定し，絶対温度 T における ε_n の平均値 $<\varepsilon_n>$ を次式で表した．

$$< \varepsilon_n >= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})} \qquad \text{(a)}$$

k_B はボルツマン定数である．

１モルの結晶中の内部エネルギー U は，$<\varepsilon_n>$ を用いて U =（ ③ ）と表わせる．(a)式の Σ を展開して整理すると，$<\varepsilon_n>$ =（ ④ ）となる．$C_v \equiv$（ ⑤ ）と定義されるため，上の結果を用いると，(i) C_v を温度の関数として表すことができ，(ii) C_v が高温では一定値を示し，低温では０に漸近することが導ける．このようにアインシュタインモデルは低温での比熱が０に漸近することを説明できるが，(iii)モデルから導かれる低温での C_v 値は実験値よりも小さくなる．

（１）（ ① ）～（ ⑤ ）に適切な語句または数式を答えよ．（ ④ ）については，導出過程も記述せよ．必要ならば，

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)\right\} \qquad \text{(b)}$$

の関係を用いて良い．

（２）下線部(i)について，C_v の温度依存性を表す式を導け．

（３）下線部(ii)について，高温での C_v の近似値および低温で０に漸近する関数形を求めよ．

（４）下線部(iii)について，他にデバイモデルがある．デバイモデルとアインシュタインモデルを比較し，(A)モデルの相違点，(B) U の求め方の違いを説明せよ．ただし，式を導出する必要はない．

問題８（原子物理学）

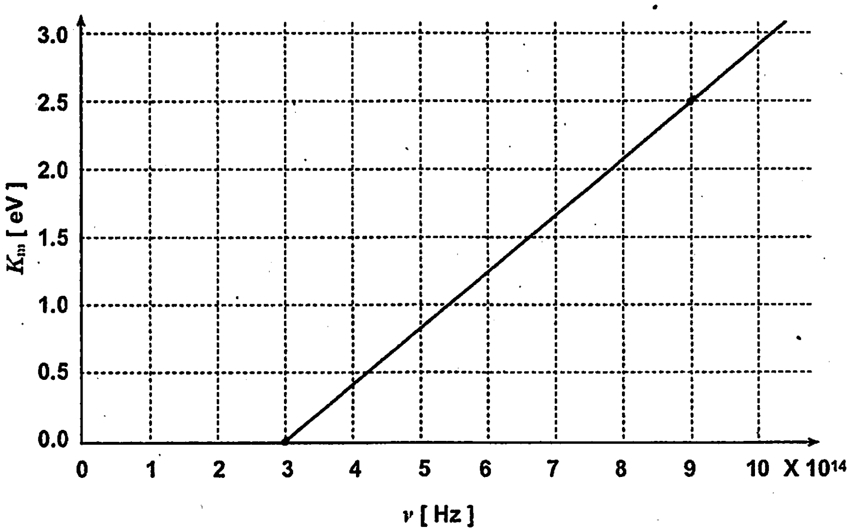
［１］加速器で静止質量 m_0 の素粒子を生成し、運動量を $2m_0c$ に調整して取り出した。ここで、 c を真空中の光の速さとする。以下の問いに答えよ。

（１）取り出した直後の素粒子の速さを c を用いて記せ。

（２）取り出した直後の素粒子の運動エネルギーを m_0 と c を用いて記せ。

（３）この素粒子の静止状態の平均寿命は τ_0 である。取り出した素粒子が消滅するまでに真空中を飛行する平均距離を c と τ_0 を用いて記せ。

［２］ある金属 M に光を照射したときに光電効果により放出される光電子の最大運動エネルギーを計測し、照射する光の振動数 ν と放出光電子の最大運動エネルギー K_m の関係をグラフにしたところ、下図に示すような結果となった。以下の問いに答えよ。真空中の光速度を 3.0×10^8 m/s とし、数値の解答は有効数字２桁で記せ。



（１）図からプランク定数と金属 M の仕事関数をそれぞれ求めよ。

（２）金属 M に波長 0.10 μm の光を照射したときに放出される光電子の最大運動エネルギーを求めよ。

（３）原子に束縛されていない自由電子では光電効果は発生しない。この理由を説明せよ。

問題９はなし

平成３０年８月２０日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
平成３１年度修士課程入学試験

「専門科目」（タイプⅡ）についての注意

試験時間　１３：３０〜１６：３０

１．　あらかじめ届け出た３題を解答せよ。また、当専攻を志望する理由についての小作文を作成せよ。

（配点：各題５０点、合計２００点満点）

２．　解答は問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

３．　解答用紙には、解答の問題番号と受験番号を記入し、氏名は記入してはいけない。

問題１（力学）

質量M, 長さLの一様でまっすぐな細い棒がある。重力加速度はgとして以下の問いに答えよ。

[１] この棒の上端Pを水平な固定軸のまわりに自由に回転できるようにして、棒を鉛直面内で運動させた。

(1)Pを通る固定軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(2) 図１に示すように棒を鉛直方向から角度θ_0だけ傾け静かに離す。棒が鉛直となす角度をθとして、この振動に対する固定軸まわりの運動方程式を記述せよ。

(3) 運動が微小振動としてθの時間変化を示せ。

(4)この棒の下端に大きさを無視できる質量Mの質点を取り付け棒を微小振動させるとき、振動の周期はどのように変化するか答えよ。

(5) 下端に取り付けた質点を取り外し、図２に示すように振動が止まった状態で棒に初期角速度ω_0を与え、点Pのまわりに回転させる。角度θにおける角速度ωを求めよ。

(6) この棒が同じ方向に回転を続けるときのω_0がみたす条件を示せ。

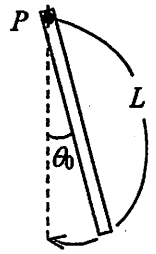


図１

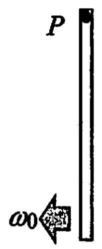


図２

[２] 次にこの棒の上端Pを固定し、そのまわりに角速度ω_tで回転させた。そのとき棒は図3のように鉛直と角度θ_1を維持して、その下端はある水平面内で回転運動を続けた。

(1) Pからxの距離にある微小部分dxにはたらく遠心力の大きさdFを求めよ。ただし棒の線密度をρとおけ。

(2) 固定端Pにおける遠心力に起因する力のモーメントを計算せよ。

(3) 固定端Pにおける重力による力のモーメントを計算せよ。

(4) 以上より角度θ_1、角速度ω_tの間に成り立つ関係を求めよ。

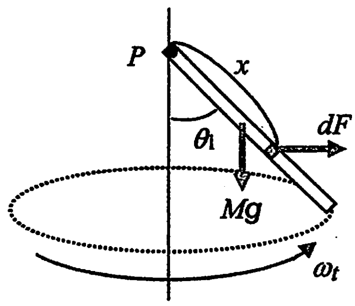


図３

問題２（物理化学）

【１】以下の反応に関する問いに答えよ。

$Ag(s) + 1/2Cl_2(g) \rightleftarrows AgCl\ (s)$ …………①

$AgCl\ (s) \rightleftarrows Ag^+(aq) + Cl^-(aq)$ …………②

反応式中の(g) は気体、(s)は固体、(aq)は溶存状態を示す。

表　反応①と②の成分の 298K における熱力学データ

	Ag(s)	Ag^+ (aq)	Cl_2 (g)	Cl^-(aq)	AgCl(s)
標準生成エンタルピー $\Delta_f H^\circ$ / kJ mol^{-1}	0	106	0	−167	−127
標準生成ギブズエネルギー $\Delta_f G^\circ$ / kJ mol^{-1}	0	77	0	−131	−110
標準エントロピー S_m° / J K^{-1} mol^{-1}	43	73	223	57	96

（１）反応①と反応②のそれぞれについて、標準反応エンタルピー（$\Delta_r H^\circ$)、標準反応ギブズエネルギー($\Delta_r G^\circ$)、標準反応エントロピー（$\Delta_r S^\circ$）を求めよ。計算手順も示すこと。

（２）AgCl (s)の水への溶解度は極めて低い。温度が 298 K よりも高くなったとき、AgCl (s)の水への溶解度は上がるか下がるか、反応②の標準反応エンタルピーの符号を使って説明せよ。

【２】容器が容積の等しい２室に仕切られ、それぞれに理想気体 A もしくは B が入っている。仕切りを静かに除いたとき、以下の条件での混合のエントロピーを求めよ。なお、温度変化はないとし、気体定数 Rと自然対数 ln を用いて解答すること。

（１） 一方の室には 3.0 mol の A、他方の室には 1.0 mol の B が入っていた場合。

（２） 一方の室には 3.0 mol の A、他方の室には 1.0 mol の A が入っていた場合。

（３） 一方の室には 3.0 mol の A、他方の室は真空であった場合。

【３】溶媒 A と溶質 B 含む溶液が半透膜を挟んで純溶媒 A と接しているとする。純溶媒側には圧力 pがかかり、溶液側の溶質のモル分率は x_B（溶媒のモル分率は x_A）で浸透圧Πがさらにかかっているとする。

（１） 平衡状態の場合、半透膜を介して両方の A の化学ポテンシャルが等しい。これを式で表せ。純物質の化学ポテンシャルはμ_A^* (x_A=1, p) または$\mu_A^*(p)$ と表されるとせよ。

（２） A のモル分率を x_Aとして溶液の化学ポテンシャル$\mu_A(x_A, p)$ と純溶媒の化学ポテンシャル$\mu_A^*(p)$ の差を示せ。

（３） 純溶媒に圧力Πをかけたときの化学ポテンシャル変化を示せ。ただしモル体積 V_m は一定とせよ。

（４） 浸透圧Πが $\Pi = RTx_B / V_m$ で表されることを示せ。

問題３　（熱力学／統計力学）

熱浴に接して真空内におかれた N 個の原子からなる純金属の固体結晶を考える。結晶構造はこの金属が固体である限りにおいて変化しない。この金属の原子配置構造に関する以下の設問に答えよ。

（１）欠陥を一切含まない理想的な結晶状態での原子のエネルギー準位を ε_s とする。この状態での原子配置構造に関する自由エネルギーを記せ。但し、表面の存在は無視してよい。

（２）一般に有限の温度 T では（１）で考えた理想的な結晶状態ではなく、構造が乱れた格子欠陥が存在する。今、格子欠陥として n 個の点欠陥が結晶の内部にできているとする。点欠陥は単純に原子が $\varepsilon_s+\Delta\varepsilon$（ただし、$\Delta\varepsilon>0$）のエネルギー準位に励起した状態であるとみなして、このときの微視的状態の数 Ω_s を求めよ。

（３）点欠陥は結晶格子点上を自由に動けるものとする。温度 T での熱平衡状態における点欠陥の濃度 n/N を導け。ただし、$N \gg n \gg 1$ であり、点欠陥同士に相互作用は働かない。

（４）この金属の ε_s と $\Delta\varepsilon$ の値は、ε_s=5.00 eV, $\Delta\varepsilon$=1.50 eV であった。600 ℃における点欠陥の熱平衡濃度 n/N の値を、下表の指数関数の値と有効数字の範囲での Taylor 展開によって求めよ。ただし、ボルツマン定数は $k_B=1.38\times10^{-23}$ J/K、電気素量は $e=1.60\times10^{-19}$ C である。

x	-1	-5	-10	-20	-30	-40	-50
e^x	0.368	6.74×10^{-3}	4.54×10^{-5}	2.06×10^{-9}	9.36×10^{-14}	4.25×10^{-18}	1.93×10^{-22}

（５）温度が T_m 以上になると、この金属は潜熱 $Q_{s\to\ell}$ と体積変化 $\Delta V_{s\to\ell}$ を伴って液体状態に変化する。固体状態（s）と液体状態（ℓ）での原子の平均エネルギー準位と微視的状態の数を、それぞれ $\bar{\varepsilon}_s, \Omega_s, \bar{\varepsilon}_\ell, \Omega_\ell$ とする。ここで、$\Delta V_{s\to\ell}$ と $\bar{\varepsilon}_s, \Omega_s, \bar{\varepsilon}_\ell, \Omega_\ell$ の温度依存性は無視できる。これらを使って潜熱 $Q_{s\to\ell}$ と融点 T_m を表せ。$Q_{s\to\ell}$ については発熱（> 0）と吸熱（< 0）の区別も付記せよ。

問題４（電磁気学）

［１］　真空中の静電場に関する以下の問いに答えよ。誘電率は ε_0 とする。

（１）　静電場 $\boldsymbol{E}$ のガウスの法則（積分形）を示せ。

（２）　前問の積分形の式から微分形の式を導け。

（３）　無限に長くて細い直線状帯電体がある。線電荷密度が λ であるとき、帯電体から距離 d の位置における電場の強さ E を求めよ。この際ガウス閉曲面を明示してガウスの法則を用いる事。

（４）　細い針金で作った半径 r の円形コイルに電荷 Q を与える。円形コイルの中心軸上にあってコイル中心から距離 h の点 P における電位 V および電場の強さを求めたい。無限遠での電位をゼロとして以下の問いに答えよ。

(a) コイル上の微小線分 $\mathrm{d}\ell$ の電荷によって点 P に生じる電位を求めよ。

(b) コイル全体の電荷によって点 P に生じる電位を求めよ。

(c) 点 P の電場の強さを求めよ。

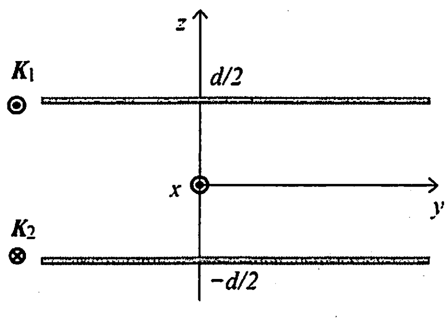
［２］　外径 $2b$、内径 $2a$ の中空導体球に電荷 Q を帯電させる。静電平衡にあるとき導体球の外側表面および内側表面における面電荷密度を求めよ。

［３］　下図に示すように無限に広い２枚のシートが距離 d だけ離れて xy 平面と平行に置かれている。各シートには一様面密度の電流 $\boldsymbol{K}_1$ と $\boldsymbol{K}_2$ が図中に示した向きに流れている。x, y, z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とし、透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ。

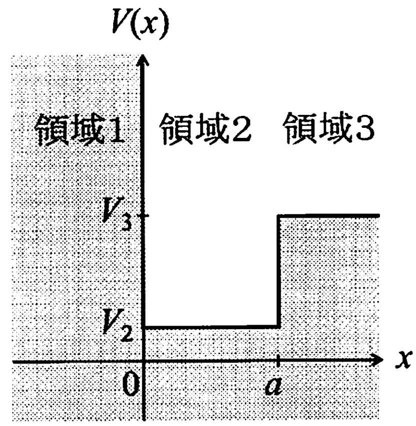
（１）　$\boldsymbol{K}_1=K\boldsymbol{i}, \boldsymbol{K}_2=0$ の場合に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

（２）　$\boldsymbol{K}_1=0, \boldsymbol{K}_2=-K\boldsymbol{i}$ の場合に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

（３）　$\boldsymbol{K}_1=K\boldsymbol{i}, \boldsymbol{K}_2=-K\boldsymbol{i}$ の場合に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。



問題５（量子力学）　問題



［１］図のような一次元のポテンシャル$V(x)$中の質量m、エネルギーEの粒子の束縛状態について考える。$V_2 < E < V_3$とする。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \quad ：領域１) \\ V_2 & (0 \leq x \leq a \quad ：領域２) \\ V_3 & (x > a \quad ：領域３) \end{cases}$$

この粒子の時間を含まないシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$$

の領域１，２，３での解を$u_1(x), u_2(x), u_3(x)$とする。$u_2(x)$と$u_3(x)$の一般解はA, B, C, Dを未定係数として以下のように表される。

$$u_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}$$
$$u_3(x) = Ce^{\kappa_3x} + De^{-\kappa_3x}$$

（１）$u_1(x)$を記せ。

（２）境界条件をすべて記せ。また$u_2(x)$と$u_3(x)$を未定係数B, C, Dを使わずに表せ。

（３）k_2とκ_3を、$m, \hbar, E, V_2, V_3, a$のうち必要なものを使って表せ。

（４）$k_2a \equiv \xi,\ \kappa_3a \equiv \eta$と定義して、(3)の結果から$\xi$と$\eta$の間に成り立つ関係を導け。また境界条件から$\xi$と$\eta$の間に成り立つ関係を導け。これらの関係を考慮して、束縛状態の解が２個以上存在するためにはV_3がV_2よりどれだけ大きい必要があるかを求めよ。

（５）最もエネルギーの低い状態とその次にエネルギーの低い状態での$u(x)$の概形をそれぞれ図示せよ。

（６）確率流密度Sについて考える。Sは時間に依存するシュレディンガー方程式の解を$\psi(x,t)$として以下の式で定義される。

$$S = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi(x,t)^*\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(x,t)^*}{\partial x}\psi(x,t)\right)$$

Sを時間を含まないシュレディンガー方程式の解$u(x)$で表した式を導け。また、領域２における確率流密度Sを求めよ。

［２］以下の交換関係を計算せよ。ただし、x, y, z方向の位置演算子、運動量演算子、角運動量演算子をそれぞれ、$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$、$\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$、$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$とする。

（１）$[\hat{z}, \hat{p}_z]$

（２）$[\hat{z}, \hat{l}_z]$

（３）$[\hat{l}_x, \hat{l}_y]$

問題６（輸送現象論）

［１］ 平板に沿って粘性流体が流れる時、平板の前縁から下流に向かって境界層が発達する。このとき、境界層の厚さδは、流体の密度ρ、粘性係数μ、主流の速度u_∞及び前縁からの距離xによって支配されるものとする。以下の問いに答えよ。

（１） δ及びこれら支配する４つの因子（ρ、μ、u_∞及びx）の次元を基本次元を用いて表せ。但し、基本次元の記号は、長さをL、質量をM、時間をTとする。

（２） 次元解析を用いてδ及びこれら支配する因子を独立な無次元量の形で表すとき、無次元量の個数が２つとなることをバッキンガムのπ定理を用いて説明せよ。

（３） δが各因子の累乗積として与えられるとき、δ/xはどのような無次元量の関数となるか、次式を用いた次元解析から導出せよ。

$$\delta = K(\rho)^a(\mu)^b(u_\infty)^c(x)^d$$

ここで、Kは無次元の係数、a~dは未知の指数である。

（４） δ/xが依存する無次元量の物理的な意味について簡単に説明せよ。

［２］ 次の文章は、運動量、熱及び物質輸送に関する基本法則を説明したものである。(１)～（１２）に適切な語句、記号あるいは単位を入れて文章を完成せよ。

直角座標系においてy方向に輸送されるx方向の運動量流束、熱流束、成分Aの質量流束をそれぞれτ_{yx}、q_y、$j_{\mathrm{A},y}$とするとき、運動量、熱および物質移動に関する基本法則は、それぞれの法則を見出した科学者の名前にちなんで、粘性に関する（１）の法則、熱伝導に関する（２）の法則、拡散に関する（３）の法則と呼ばれ

$$\tau_{yx} = -\nu\frac{\mathrm{d}(4)}{\mathrm{d}y}, \qquad q_y = -\alpha\frac{\mathrm{d}(5)}{\mathrm{d}y}, \qquad j_{\mathrm{A},y} = -D_{\mathrm{AB}}\frac{\mathrm{d}(6)}{\mathrm{d}y}$$

で表される。ここで、ρは密度、uはx方向の速度、cは比熱容量、Tは温度、ρ_{A}はAとBの２成分よりなる混合流体の成分Aの密度である。比例定数ν、α、D_{AB}は、それぞれ（７）、（８）、（９）と呼ばれる輸送物性で、何れもそのSI単位は（１０）である。また、ν及びαは、c、k（熱伝導率）、ρ、μ（粘性係数）を用いて表すと、それぞれ、$\nu =$（１１）、$\alpha =$（１２）である。これらの基本法則は、粘性による運動量、熱伝導による熱、拡散による物質の輸送現象が相似的に扱えることを示している。

問題7（固体物理学）

［1］固体の定積モル比熱 C_v について，以下の問いに答えよ．

アインシュタインは，1モルの固体結晶（原子数 N_0）の格子振動を，同一の振動数 ν_{E} を持つ $3N_0$ 個の（①）の集りと見なし，（①）のエネルギー準位(ε_n)を量子仮説に基づいて，零点振動を考慮して ε_n=(②)と表わした．彼は ε_n の分布がマクスウェル・ボルツマン分布に従うと仮定し，絶対温度 T における ε_n の平均値 $<\varepsilon_n>$ を次式で表した．

$$< \varepsilon_n >= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_{\mathrm{B}}T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_{\mathrm{B}}T})} \qquad \text{(a)}$$

k_{B} はボルツマン定数である．

1モルの結晶中の内部エネルギー U は，$<\varepsilon_n>$ を用いて U=(③)と表わせる．(a)式の Σ を展開して整理すると，$<\varepsilon_n>$=(④)となる．C_v≡(⑤)と定義されるため，上の結果を用いると，(i) C_v を温度の関数として表すことができ，(ii) C_v が高温では一定値を示し，低温では0に漸近することが導ける．このようにアインシュタインモデルは低温での比熱が0に漸近することを説明できるが，(iii)モデルから導かれる低温での C_v 値は実験値よりも小さくなる．

（1）（①）～（⑤）に適切な語句または数式を答えよ．（④）については，導出過程も記述せよ．必要ならば，

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx)\right\} \qquad \text{(b)}$$

の関係を用いて良い．

（2）下線部(i)について，C_v の温度依存性を表す式を導け．

（3）下線部(ii)について，高温での C_v の近似値および低温で0に漸近する関数形を求めよ．

（4）下線部(iii)について，他にデバイモデルがある．デバイモデルとアインシュタインモデルを比較し，(A)モデルの相違点，(B) U の求め方の違いを説明せよ．ただし，式を導出する必要はない．

問題は裏に続く

[2] 原子，分子，またはイオンの集団が空間的に規則正しく周期的に配列した固体を(①)という．空間格子とは，(①)中の格子点が作る周期的に配列した三次元格子のことであり，その対称性から14種類に分類される．これは(②)格子と呼ばれるものであり，(②)格子は対称性の良いものから順に立方格子，(③)格子，(④)格子，六方格子，単斜格子，三方格子，三斜格子の7つの結晶系に分類され，各結晶系には，(⑤)格子，(⑥)格子，面心格子，底心格子の4種の格子が存在する．この2種の格子の組み合わせにより，(②)格子では，例えば
面心立方格子と表される．

(①)を広い範囲で見ると，必ず規則性が乱れた領域があり，これを(⑦)という．原子が本来あるべき位置に存在しない場合，これを(⑧)といい，原子位置ではない原子間に存在する原子を(⑨)という．(⑧)および(⑨)は点欠陥と呼ばれるもので，点欠陥の形態には(i)フレンケル欠陥とショットキー欠陥がある．1次元の欠陥は線欠陥とも呼ばれ，これには(①)のすべり変形を担う(⑩)がある．

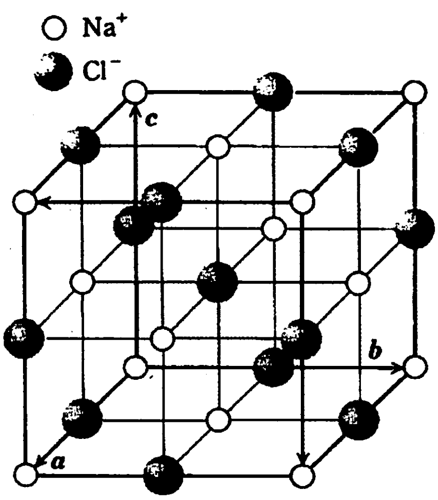
(1) (①)〜(⑩)に適切な語句を答えよ．

(2) 面心立方格子は最密充填構造である．この格子の(a) 最密面，および(b) 充填率を答えよ．(a)は面指数を用いること．

(3) 六方最密格子も最密充填構造である．面心立方格子と六方最密格子の構造の違いはどこにあるか．最密面の積層に着目して説明せよ．

(4) 下線部(i)について，フレンケル欠陥とショットキー欠陥をその違いがわかるように説明せよ．

(5) 図は塩化ナトリウムの結晶構造を表している．右の単位構造中に含まれる原子数を答えよ．また，この構造は (1) で求めた(②)格子ではどの格子に分類されるか．理由を付して答えよ．



NaCl

問題８（原子物理学）

［１］以下の問いに答えよ。

（１）量子数が $n = 4$ のエネルギー準位に励起された水素原子が $n = 2$ のエネルギー準位に遷移した。この遷移で放射される光のエネルギーを求めよ。ここで、水素原子の基底エネルギー準位を -13.6 eV とする。

（２）ハイゼンベルグの不確定性関係を示す式を記せ。

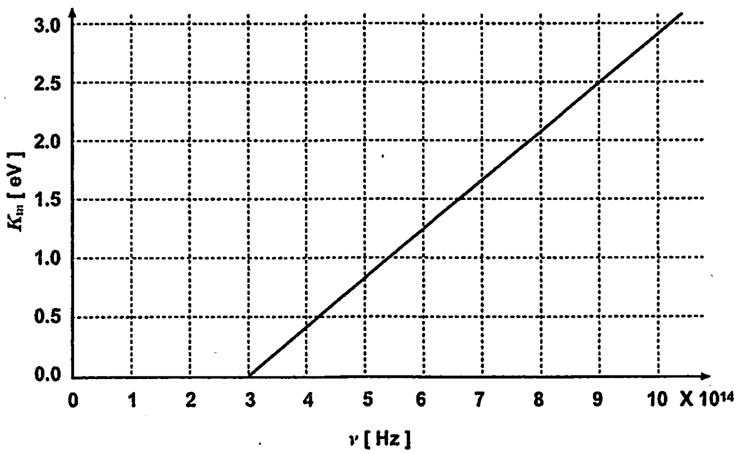
［２］加速器で静止質量 m_0 の素粒子を生成し、運動量を $2m_0c$ に調整して取り出した。ここで、c を真空中の光の速さとする。以下の問いに答えよ。

（１）取り出した直後の素粒子の速さを c を用いて記せ。

（２）取り出した直後の素粒子の運動エネルギーを m_0 と c を用いて記せ。

（３）この素粒子の静止状態の平均寿命は τ_0 である。取り出した素粒子が消滅するまでに真空中を飛行する平均距離を c と τ_0 を用いて記せ。

［３］ある金属 M に光を照射したときに光電効果により放出される光電子の最大運動エネルギーを計測し、照射する光の振動数 ν と放出光電子の最大運動エネルギー K_m の関係をグラフにしたところ、下図に示すような結果となった。以下の問いに答えよ。真空中の光速度を 3.0×10^8 m/s とし、数値の解答は有効数字２桁で記せ。



（１）図からプランク定数と金属 M の仕事関数をそれぞれ求めよ。

（２）金属 M に波長 0.10 μm の光を照射したときに放出される光電子の最大運動エネルギーを求めよ。

（３）原子に束縛されていない自由電子では光電効果は発生しない。この理由を説明せよ。

問題１０（小作文）

エネルギー量子工学専攻を志望する理由について、その経緯、入学後にしたい研究や勉強、修了後の進路希望などを含めて、１０００字程度で説明しなさい。

なお、作文には升目の用紙を使用すること。