平成３０年８月２０日

九州大学大学院工学府エネルギー量子工学専攻
平成３１年度修士課程入学試験

「数学」についての注意

試験時間　９：００〜１０：３０

１．　問題１（必須）と、問題２か問題３のどちらか１題を選択し、合計２題を解答すること。

（必須６０点、選択４０点、合計１００点満点）

２．　解答は、問題毎に別々の解答用紙に記入せよ。（裏面も使用可）

１枚に記入しきれない場合には、追加解答用紙を請求すること。

３．　問題の解答用紙には、問題の番号と受験番号を記入し、<u>氏名は記入してはいけない。</u>

問題1（必須）

[1]　(1) 次の行列 A に対して固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式 B を因数分解せよ。

$$B=\begin{vmatrix} x & a & b & c & d & e & f \\ a & x & b & c & d & e & f \\ a & b & x & c & d & e & f \\ a & b & c & x & d & e & f \\ a & b & c & d & x & e & f \\ a & b & c & d & e & x & f \\ a & b & c & d & e & f & x \end{vmatrix}$$

[2]　下記の積分を実行して、各値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx$

[3]　下記の微分方程式の解を求めよ。

(1) $\displaystyle(1-x^2)\frac{dy}{dx}=1-xy$

(2) $\displaystyle y\frac{d^2 y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}$

問題2（選択）

[1] zを複素数とするとき、$z^n = 1$のn個の根を全て示せ。

[2] 複素平面において、次の方程式で与えられる図形を描け。

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$$

[3] 複素数zの関数$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-2)}$について、$0 < |z| < 1$におけるローラン展開を求めよ。

[4] 実変数θと実定数aで定義された次の実積分Iを計算せよ。ただし、$-1 < a < 1$とする。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\sin\theta} d\theta$$

問題3（選択）

[1] 次で定義される関数$f(x)$を考える（a は正の定数)。以下の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ -e^{ax} & (x < 0) \end{cases}$$

(1) $f(x)$のフーリエ変換$\mathcal{F}[f(x)](\omega)$を求めよ。

(2) 前問の結果を用いて、逆フーリエ変換の過程を記述し、次の等式が成立することを示せ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{a^2 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} \pi e^{-ax} & (x > 0) \\ -\pi e^{ax} & (x < 0) \end{cases}$$

[2] 関数$f(t)$に対する次の常微分方程式（ωは正の定数）の初期値問題を解くためにラプラス変換を用いる。以下の問いに答えよ。

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = \cos \omega t,\ f(0) = f'(0) = 0$$

(1) $\cos \omega t,\ \sin \omega t$のラプラス変換を求めよ。

(2) $f'(t),\ f''(t)$のラプラス変換を，$f(t)$のラプラス変換$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$を用いて表せ。

(3) $F(s)$を求めよ。

(4) (1)の結果及びたたみこみの定理を使って、$f(t)$を求めよ。